军考数学·每天一练

学习过程是一个递进的过程，不管是知识的深度还是广度，只有一个台阶一个台阶地向上攀登才能达到更高的境界，如果由最初的第一台阶就想跃到最高的台阶，不管怎么跳跃都是不可能实现的。

理科的学习注重的是公式或定理的应用和解题思维的培养，如果只是对公式或定理熟练记忆而没有练习的过程，理科的学习就是徒劳的。

如果说利用崔爱功《军考突破》学通各章节知识点是必备的第一步，那么第二步不可缺少的就是利用对应的有针对性的练习题结合军考突破做题训练；多年经验告诉我们，战士考生复习过程中在记住公式和定理的同时，更为重要的就是对知识点的反复应用，在练习的过程中加深记忆和理解、培养解题思维、总结解题方法；只有这样，在应用过程中才能形成整个知识体系，从而达到前后贯通、应用自如。

《军考数学·每天一练》按照每天一训练的要求编写了对应的练习题，这样编写的目的是让战士考生清楚地知道每天学什么、练哪些，循序渐进、日进一寸；难度从低到高编写有梯度的习题，目的是让战士考生按部就班地夯实基础、提升能力。

崔爱功军考数学《每天一练》与崔爱功《军考突破》相辅相成，战士考生利用《军考突破》来学通各章节知识点，利用《数学每天一练》巩固和运用对应所学知识点考点，定能达到的深入的理解和熟练的应用。

本册资料适用于优秀消防员战士考生；本资料分为了 58 天，学习完之后建议用《崔爱功军考模拟题》和《崔爱功军考考前冲刺卷》来做综合测试以及查漏补缺，该套资料检验综合能力，锻炼应试技能，确保颗粒归仓。

目　录

第一章　集合与简易逻辑 …… 1
第 01 天　集合的运算 …… 1
第 02 天　逻辑与充要条件 …… 2
第 03 天　集合经典例题 …… 3
第二章　函　数 …… 10
第 04 天　函数概念（定义域、对应律、值域、分段函数） …… 10
第 05 天　函数性质（单调性、奇偶性、反函数） …… 12
第 06 天　二次函数 …… 13
第 07 天　指数函数 …… 14
第 08 天　对数函数 …… 15
第 09 天　函数经典例题（1） …… 16
第 10 天　函数经典例题（2） …… 17
第三章　数　列 …… 33
第 11 天　等差数列（1） …… 33
第 12 天　等差数列（2） …… 34
第 13 天　等比数列（1） …… 35
第 14 天　等比数列（2） …… 36
第 15 天　递推、求和 …… 37
第 16 天　数列经典例题 …… 38
第四章　不等式 …… 55
第 17 天　不等式的概念与性质 …… 55
第 18 天　均值不等式 …… 56
第 19 天　一元二次不等式的解法 …… 57
第 20 天　分式不等式的解法 …… 58
第 21 天　指数、对数不等式的解法 …… 58
第 22 天　绝对值不等式 …… 59
第五章　排列、组合二项式定理 …… 69
第 23 天　排列组合综合应用 …… 69
第 24 天　排列组合的典型例题（1） …… 69
第 25 天　排列组合的典型例题（2） …… 70
第 26 天　二项式定理 …… 71
第六章　统计初步 …… 78
第 27 天　随机抽样 …… 78
第 28 天　用样本估计总体 …… 80

第七章　概　率 ………… 88
第 29 天　互斥事件的概率 ………… 88
第 30 天　古典概型和几何概型 ………… 89
第 31 天　相互独立事件和独立重复试验 ………… 91

第八章　三角函数 ………… 100
第 32 天　三角函数的定义与公式（1） ………… 100
第 33 天　三角函数定义与公式（2） ………… 102
第 34 天　三角函数的图象和性质 ………… 103
第 35 天　三角函数的典型例题 ………… 104
第 36 天　解三角形典型例题（1） ………… 105
第 37 天　解三角形典型例题（2） ………… 106

第九章　平面向量 ………… 121
第 38 天　平面向量的线性运算 ………… 121
第 39 天　平面向量的数量积 ………… 122
第 40 天　向量的典型例题（1） ………… 123
第 41 天　向量的典型例题（2） ………… 124

第十章　直线和圆的方程 ………… 132
第 42 天　直线的方程 ………… 132
第 43 天　两条直线的位置关系 ………… 132
第 44 天　圆的方程 ………… 133
第 45 天　直线和圆的方程 ………… 134
第 46 天　直线与圆经典例题 ………… 135

第十一章　圆锥曲线与方程 ………… 145
第 47 天　椭圆的方程 ………… 145
第 48 天　椭圆的性质 ………… 146
第 49 天　双曲线的方程与性质 ………… 147
第 50 天　抛物线的方程与性质 ………… 147
第 51 天　圆锥曲线经典例题（1） ………… 148
第 52 天　圆锥曲线经典例题（2） ………… 149

第十二章　立体几何 ………… 168
第 53 天　直线和平面平行、平面和平面平行 ………… 168
第 54 天　垂直（线线、线面、面面） ………… 170
第 55 天　角、距离（线面、面面、异面直线） ………… 172
第 56 天　球（表面积、体积） ………… 173
第 57 天　立体几何经典例题（1） ………… 174
第 58 天　立体几何经典例题（2） ………… 175

第一章　集合与简易逻辑

第 01 天　集合的运算

1．如果集合 $A=\{x\,|\,x\leqslant\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{2}$，那么（　　）

A．$a\notin A$　　B．$\{a\}\subseteq A$　　C．$\{a\}\in A$　　D．$a\subseteq A$

2．已知集合 $A=\{x\,|\,x>0\}$，$B=\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B$ 等于（　　）

A．$\{x\,|\,x\geqslant -1\}$　　B．$\{x\,|\,x\leqslant 2\}$　　C．$\{x\,|\,0<x\leqslant 2\}$　　D．$\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

3．已知全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4\}$，则 $(\complement_U A)\cup B$ 为（　　）

A．$\{1,2,4\}$　　B．$\{2,3,4\}$　　C．$\{0,2,4\}$　　D．$\{0,2,3,4\}$

4．已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$，集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$，则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$（　　）

A．$\{5,8\}$　　B．$\{7,9\}$　　C．$\{0,1,3\}$　　D．$\{2,4,6\}$

5．已知集合 $M=\{(x,y)\,|\,x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x-y=4\}$，那么集合 $M\cap N$ 为（　　）

A．$x=3$，$y=-1$　　B．$\{(x,y)\,|\,x=3$ 或 $y=-1\}$

C．$(3,-1)$　　D．$\{(3,-1)\}$

6．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x\leqslant 1$，或 $x\geqslant 3\}$，集合 $B=\{x\,|\,k<x<k+1,\ k\in\mathbf{R}\}$，且 $B\cap(\complement_U A)\neq\varnothing$，则（　　）

A．$k<0$ 或 $k>3$　　B．$2<k<3$　　C．$0<k<3$　　D．$-1<k<3$

7．若 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cap B=B$，则 x 的值为（　　）

A．2 或 -2　　B．0 或 -2　　C．0 或 2　　D．0、2 或 -2

8．设集合 $A=\{x\,|\,x^2-x=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+x=0\}$，则集合 $A\cap B$ 的运算结果为（　　）

A．0　　B．$\{0\}$　　C．$\varnothing$　　D．$\{-1,0,1\}$

9．设 $S=\{x\,|\,2x+1>0\}$，$T=\{x\,|\,3x-5<0\}$，则 $S\cap T$ 等于（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{x\,|\,x<-\frac{1}{2}\}$　　C．$\{x\,|\,x>\frac{5}{3}\}$　　D．$\{x\,|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\}$

10．集合 $P=\{x\,|\,x\neq 1,\ x\in\mathbf{R}\}$，$Q=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，则 $P\cup Q$ 为（　　）

A．Q　　B．P　　C．$\mathbf{R}$　　D．无法判定

11．设集合 $A=\{x\,|-1<x<1\}$，$B=\{x\,|-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0，1\}$　　B．$\{-1，0\}$　　C．$\{0\}$　　D．$\{-1，0，1\}$

12．方程 $x^2+2x=0$ 的解集是（　　）

A．$\{0，2\}$　　B．$\{0，-2\}$　　C．$\{2\}$　　D．$\{-2\}$

13．设集合 $P=\{x\mid x^2+x-30=0\}$，集合 $T=\{x\mid mx+3=0\}$，且 $T\subseteq P$，则 m 的值组成的集合是_______.

14．设集合 $A=\{x\mid x^2\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x-m<0\}$．若 $A\subseteq B$，则实数 m 的取值范围是_______.

15．“$|f(-x)|=|f(x)|$”是“$f(x)$为偶函数”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

16．已知集合 $A=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$，$B=\{x\mid |2x-7|\geqslant 11\}$．若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是_______.

第 02 天　逻辑与充要条件

1．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>\frac{1}{2}$”是“$2x^2+x-1>0$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“直线 $l_1:ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+2y+4=0$ 平行”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．设命题甲：$ax^2+2ax+1>0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$，命题乙：$a=0$，则命题甲是命题乙成立的（　　）

A．充分不必要条件　　B．充要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知 α，β 是不同的两个平面，直线 $a\subset\alpha$，直线 $b\subset\beta$．命题 $p:a$ 与 b 无公共点；命题 $q:\alpha/\!/\beta$，则 p 是 q 的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．若 a，b 为实数，则“$0<ab<1$”是“$b<\frac{1}{a}$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知不等式 $x+3\geqslant 0$ 的解集是 A，则使得 $a\in A$ 是假命题的 a 的取值范围是（　　）

A．$a\geqslant -3$　　B．$a>-3$　　C．$a\leqslant -3$　　D．$a<-3$

7．设命题 p：函数 $y=\sin 2x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$；命题 q：函数 $y=\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称．则下列判断正确的是（　　）

A．p为真　　B．非q为假　　C．$p\wedge q$为假　　D．$p\vee q$为真

8．$p:\dfrac{1}{x-3}<0$，$q:x^2-4x-5<0$，若p且q为假命题，则x的取值范围是______．

9．已知命题p：关于x的不等式$x^2+2ax+4>0$对一切$x\in\mathbf{R}$恒成立；q：函数$f(x)=-(5-2a)^x$是减函数，若$p\vee q$为真，$p\wedge q$为假，求实数a的取值范围．

第03天　集合经典例题

1．已知集合$P=\{x\,|\,x(x-1)\geqslant 0，x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{x\,|\,\dfrac{1}{x-1}>0，x\in\mathbf{R}\}$，则$P\cap Q$等于（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{x\,|\,x\geqslant 1，x\in\mathbf{R}\}$

C．$\{x\,|\,x>1，x\in\mathbf{R}\}$　　D．$\{x\,|\,x\geqslant 1$或$x<0，x\in\mathbf{R}\}$

2．设α，$\beta\in(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$，那么“$\alpha<\beta$”是“$\tan\alpha<\tan\beta$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．设$\mathbf{R}$为实数集，若A为全体正实数的集合，$B=\{-2，-1，1，2\}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$A\cap B=\{-2，-1\}$　　B．$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=(-\infty，0)$

C．$A\cup B=(0，+\infty)$　　D．$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{-2，-1\}$

4．条件$p:|x|=x$，条件$q:x^2\geqslant -x$，则p是q的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．若集合$A=\{x\,|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，$Q=\{x\,|\,x<-1$或$x>4\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{x\,|\,x\leqslant 3$或$x>4\}$　　B．$\{x\,|-1<x\leqslant 3\}$

C．$\{x\,|\,3\leqslant x<4\}$　　D．$\{x\,|-2\leqslant x<-1\}$

6．$a<0$是方程$ax^2+2x+1=0$至少有一个负根的（　　）

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．设全集$U=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,0\leqslant x\leqslant 5\}$，集合$A=\{1，3\}$，$B=\{y\,|\,y=\log_{\sqrt{3}}x，x\in A\}$，则集合$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$（　　）

A．$\{0，2，4，5\}$　　B．$\{0，4，5\}$　　C．$\{2，4，5\}$　　D．$\{4，5\}$

8．设a、b都是实数，则“$\lg(a^2+1)<\lg(b^2+1)$”是“$a<b$”的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

9．已知$A\bullet B\bullet C\neq 0$，则“$A$、$B$、$C$三者符号相同”是“方程$Ax^2+By^2=C$表示椭圆”的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知集合 $P=\{-1,0,1\}$，$Q=\{x\mid x=ab，a，b\in P且a\neq b\}$，则 $P\cup Q$ 等于（　　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{-1,0,1\}$　　D．$\{-1,1\}$

11．“$x_1>2$ 且 $x_2>2$”是“$x_1+x_2>4$ 且 $x_1x_2>4$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要

12．设集合 $P=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $Q=\{a,b\}$，若 $P\cap Q=\{2\}$，则 $P\cup Q=$（　　）

A．$\{1,2,4\}$　　B．$\{1,2,5\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{2,3,5\}$

13．“$k=h$”是“直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-k)^2+(y-h)^2=2$ 相切”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

14．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|<2\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid \frac{1}{2}<2^x<5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x\in\mathbf{R}\mid -2<x<2\}$　　B．$\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<2\}$

C．$\{x\in\mathbf{R}\mid -2<x<\log_2 5\}$　　D．$\{x\in\mathbf{R}\mid -1<x<\log_2 5\}$

15．已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

第一章　集合与简易逻辑

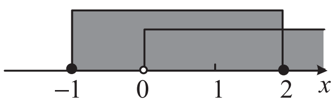
第 01 天　集合的运算

1.【答案】B

【详解】$a=\sqrt{2}<\sqrt{3}$，$\therefore a\in A$，A 错误，由元素与集合之间的关系及集合与集合之间的关系可知，C、D 错，B 正确.

2.【答案】A

【详解】画出数轴表示如图，$A\cup B$ 如阴影部分所示.



3.【答案】C

【详解】$(\complement_U A)=\{0，4\}$，所以$(\complement_U A)\cup B=\{0，4\}\cup\{2，4\}=\{0，2，4\}$.

4.【答案】B

【详解】根据集合运算的性质求解．因为$A\cup B=\{0，1，2，3，4，5，6，8\}$，所以$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{7，9\}$.

5.【答案】D

【详解】$M\cap N=\left\{(x，y)\left|\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}\right.\right\}=\left\{(x，y)\left|\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\right.\right\}=\{(3，-1)\}$.

6.【答案】C

【详解】$\complement_U A=\{x\,|\,1<x<3\}$，借助于数轴可得$\begin{cases}k+1>1\\k<3\end{cases}$ $\therefore 0<k<3$.

7.【答案】D

【详解】由 $A\cap B=B$，得 $B\subseteq A$，则 $x^2=4$ 或 $x^2=x$，且 $x\neq 1$.

【点评】考查集合与集合的关系.

8.【答案】B

【详解】$A=\{0，1\}$，$B=\{-1，0\}$.

【点评】考查集合的交集运算.

9.【答案】D

【详解】$\because S=\{x\,|\,2x+1>0\}=\{x\,|\,x>-\frac{1}{2}\}$，$T=\{x\,|\,3x-5<0\}=\{x\,|\,x<\frac{5}{3}\}$，

$\therefore S\cap T=\{x\,|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\}$.

【点评】考查集合的交集运算.

10.【答案】B

【详解】$Q\subseteq P\Leftrightarrow P\cup Q=P$.

【点评】考查集合的并集运算.

11.【答案】C

【详解】$A\cap B=\{0\}$，交集取公共元素.

【点评】考查集合的基本运算.

12.【答案】B

【详解】$\because x^2+2x=x(x+2)=0$，$\therefore x=0$ 或 $x=-2$．$\therefore$解集为$\{0，-2\}$.

【点评】考查集合的表示法.

13.【答案】$\{0，\frac{1}{2}，-\frac{3}{5}\}$

【详解】$P=\{x\mid x^2+x-30=0\}=\{-6，5\}$；$T=\{x\mid mx+3=0\}$，且$T\subseteq P$

所以$m=0$或$-\frac{3}{m}=-6$或$-\frac{3}{m}=5\Leftrightarrow m=0$或$m=\frac{1}{2}$或$m=-\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查子集的概念，注意到空集是任意集合的子集.

14.【答案】$(2，+\infty)$

【详解】$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x<m\}$．若$A\subseteq B$，则$m>2$.

【点评】本题考查集合的子集概念.

15.【答案】B

【详解】$|f(-x)|=|f(x)|\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$或$f(-x)=-f(x)$；

$f(x)$为偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$

所以“$|f(-x)|=|f(x)|$” $\overset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}$ “$f(x)$为偶函数”，

所以“$|f(-x)|=|f(x)|$”是“$f(x)$为偶函数”的必要不充分条件.

16.【答案】$(-1，8)$

【详解】$B=\{x\mid |2x-7|\geqslant 11\}=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 9\}$

若$A\cap B=\varnothing$，则$\begin{cases}a-1>-2\\a+1<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>-1\\a<8\end{cases}\Leftrightarrow -1<a<8$.

第 02 天　逻辑与充要条件

1.【答案】A

【详解】由$2x^2+x-1>0$，可得$x<-1$或$x>\frac{1}{2}$，$\therefore$“$x>\frac{1}{2}$”是“$2x^2+x-1>0$”的充分不必要条件.

2.【答案】C

【详解】l_1 与 l_2 平行的充要条件为 $a\times 2=2\times 1$ 且 $a\times 4\neq -1\times 1$，得 $a=1$.

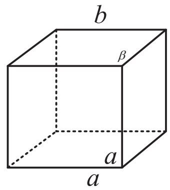
3.【答案】C

【详解】若 $ax^2+2ax+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，

则 $a=0$ 或 $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow a=0$ 或 $\begin{cases}a>0\\ 4a^2-4a<0\end{cases}\Leftrightarrow a=0$ 或 $0<a<1$ $\therefore 0\leqslant a<1$.

因此乙 $\Rightarrow$ 甲，但甲 $\nRightarrow$ 乙. $\therefore$命题甲是命题乙成立的必要不充分条件.

4.【答案】B



【详解】如图，正方体中的 a，b 无公共点，但 α，β 相交. 反之，显然 $\alpha /\!/ \beta\Rightarrow a$ 与 b 无公共点.

5.【答案】D

【详解】当 $0<ab<1$，$a<0$，$b<0$ 时，有 $b>\dfrac{1}{a}$；反过来，$b<\dfrac{1}{a}$，当 $a<0$ 时，有 $ab>1$.

$\therefore$ “$0<ab<1$”是“$b<\dfrac{1}{a}$”的既不充分也不必要条件.

6.【答案】D

【详解】$\because x+3\geqslant 0$，$\therefore A=\{x\mid x\geqslant -3\}$.

又 $\because a\in A$ 是假命题，即 $a\notin A$，$\therefore a<-3$.

7.【答案】C

【详解】因周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 p 为假命题.

因 $\cos x$ 的对称轴为 $x=k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），

故 q 也为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假.

8.【答案】$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

【详解】$p: x<3$，$q: -1<x<5$.

$\because p\wedge q$ 为假命题，$\therefore p$，q 中至少有一个为假，$\therefore x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$

9.【详解】设 $g(x)=x^2+2ax+4$. 由于关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4>0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

$\therefore$函数 $g(x)$ 的图象开口向上且与 x 轴没有交点，故 $\Delta=4a^2-16<0$.

$\therefore -2<a<2$，$\therefore$命题 $p: -2<a<2$.

$\because$函数 $f(x)=-(5-2a)^x$ 是减函数，

则有 $5-2a>1$，即 $a<2$，$\therefore$命题 $q: a<2$.

又由于 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，可知 p 和 q 一真一假.

（1）若 p 真 q 假，则 $\begin{cases}-2<a<2\\a\geqslant 2\end{cases}$ 此不等式组无解.

（2）若 p 假 q 真，则 $\begin{cases}a\leqslant -2\text{或}a\geqslant 2\\a<2\end{cases}$ $\therefore a\leqslant -2$.

综上可知，所求实数 a 的取值范围是 $\{a\,|\,a\leqslant -2\}$.

第 03 天　集合经典例题

1.【答案】C

【详解】由 $x(x-1)\geqslant 0$，得 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0$；由 $\dfrac{1}{x-1}>0$，得 $x>1$，即 $Q\subseteq P$，

得 $P\cap Q=Q=\{x\,|\,x>1，x\in\mathbf{R}\}$.

【点评】本题考查解不等式和集合的运算.

2.【答案】C

【详解】函数 $y=\tan x$ 在区间 $(-\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{2})$ 上是增函数，$\alpha<\beta\Leftrightarrow\tan\alpha<\tan\beta$.

【点评】本题考查的是正切函数的单调性以及充要条件的判定.

3.【答案】D

【详解】$\because A=\{x\,|\,x>0\}$，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\,|\,x\leqslant 0\}$，$\therefore(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{-2，-1\}$.

【点评】本题考查集合的交、并、补运算.

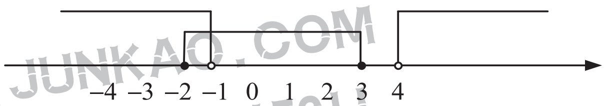
4.【答案】A

【详解】p：$|x|=x\Leftrightarrow x\geqslant 0$；$q$：$x^2\geqslant -x\Leftrightarrow x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -1$，$\therefore p\Rightarrow q$，$q\nRightarrow p$.

【点评】本题涉及不等式的化简，重点考查充要条件的判定.

5.【答案】D

【详解】$A\cap B=\{x\,|\,-2\leqslant x<-1\}$.



【点评】本题考查集合的交集运算.

6.【答案】B

【详解】$a<0$ 时，用根与系数的关系定理可知方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个负根，一个正根. $a=0$ 时，方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个负根 $x=-\dfrac{1}{2}$. 这就表明 $a<0$ 是方程 $ax^2+2x+1=0$ 有一个负根的充分非必要条件.

【点评】要注意考虑特殊情况，这是做选择题的首选方法，本题也可分析出方程至少有一个负根的充要条件，但是作为选择题不是最好的方法.

7.【答案】D

【详解】$U=\{0，1，2，3，4，5\}$，$A=\{1，3\}$，$B=\{0，2\}$

$\therefore \complement_U A=\{0,2,4,5\}$，$\complement_U B=\{1,3,4,5\}$

$\therefore (\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{4,5\}$.

【点评】本题考查集合的交、补运算.

8.【答案】D

【详解】先化简 $\lg(a^2+1)<\lg(b^2+1)\Leftrightarrow a^2+1<b^2+1\Leftrightarrow |a|<|b|$

又 $|a|<|b|$ 不能推出 $a<b$， $a<b$ 不能推出 $|a|<|b|$.

【点评】本题涉及对数的运算，重点考查充要条件.

9.【答案】C

【详解】“方程 $Ax^2+By^2=C$ 表示椭圆” $\Leftrightarrow$ “ A、B、C 三者符号相同，且 $A\neq B$”，

所以“ A、B、C 三者符号相同” $\Leftarrow$ “方程 $Ax^2+By^2=C$ 表示椭圆”，

而“ A、B、C 三者符号相同” $\not\Rightarrow$ “方程 $Ax^2+By^2=C$ 表示椭圆”，

故“ A、B、C 三者符号相同”是“方程 $Ax^2+By^2=C$ 表示椭圆”的必要不充分条件.

【点评】考查命题充分性必要性的判定，涉及椭圆的标准方程.

10.【答案】C

【详解】$Q=\{-1,0\}$，则 $P\cup Q=\{-1,0,1\}$.

【点评】考查集合的并集运算.

11.【答案】A

【详解】充分性显然成立，若 $x_1=5$， $x_2=\dfrac{1}{2}$，满足 $x_1+x_2>4$ 且 $x_1x_2>4$，但不满足 $x_1>2$ 且 $x_2>2$，故必要性不成立.

【点评】考查命题的充分性和必要性的判断.

12.【答案】B

【详解】据题设 $\log_2(a+3)=2\Leftrightarrow a=1\therefore b=2$

$P=\{5,2\}$，$Q=\{1,2\}$， $\therefore P\cup Q=\{1,2,5\}$

【点评】考查集合的并集运算.

13.【答案】A

【详解】直线 $y=x+2$ 与圆 $(x-k)^2+(y-h)^2=2$ 相切 $\Leftrightarrow$ 圆心到直线的距离等于半径，即

$\dfrac{|k-h+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|k-h+2|=2$ 所以 $k=h$ 或 $k-h+4=0$.

【点评】考查命题的充分性和必要性的判断.

14.【答案】B

【详解】$\because A=\{x\in\mathbf{R}\,\|\,x|<2\}=\{x|-2<x<2\}$， $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,\dfrac{1}{2}<2^x<5\}=\{x\,|\,2^{-1}<2^x<2^{\log_2 5}\}$

$=\{x\,|-1<x<\log_2 5\}$， $\therefore A\cap B=\{x\in\mathbf{R}\,|-1<x<2$.

【点评】本题考查集合的交集运算.

15.【答案】A

【详解】$\because a=3\Rightarrow A\subseteq B$，但 $A\subseteq B\not\Rightarrow a=3$，所以“ $a=3$ ”是“ $A\subseteq B$ ”的充分不必要条件.

【点评】考查命题的充分性和必要性的判断.

第二章　函　数

第 04 天　函数概念（定义域、对应律、值域、分段函数）

1．函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ 的定义域是（　　）

A．$\{x\mid x\leqslant 1\}$　　B．$\{x\mid x\geqslant 0\}$

C．$\{x\mid x\geqslant 1$，或 $x\leqslant 0\}$　　D．$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases} f(x-1),x>0 \\ -2,x=0 \\ 3^x,x<0 \end{cases}$，则 $f(2)=$（　　）

A．9　　B．3　　C．0　　D．-2

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1,x\leqslant 1 \\ 2^x+ax,x>1 \end{cases}$，若 $f(f(1))=4a$，则实数 $a=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．2　　D．4

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{x-1}-2,x\leqslant 1 \\ -\log_2(x+1),x>1 \end{cases}$，且 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$（　　）

A．$-\frac{7}{4}$　　B．$-\frac{5}{4}$　　C．$-\frac{3}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$

5．已知 $f(x)=\begin{cases} x+1,x<0 \\ 0,x=0 \\ x-1,x>0 \end{cases}$，则 $f[f(\frac{2}{3})]$ 的值为（　　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

6．已知函数 $f(x)=x^2+2x$（$-2\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\in\mathbf{Z}$），则 $f(x)$ 的值域是（　　）

A．$[0,3]$　　B．$\{-1,0,3\}$

C．$\{0,1,3\}$　　D．$[-1,3]$

7．已知函数 $y=f(x+1)$ 定义域是 $[-2,3]$，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是（　　）

A．$[0,\frac{5}{2}]$　　B．$[-1,4]$

C．$[-5,5]$　　D．$[-3,7]$

8．已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1
x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

（1） $f[g(1)]=$_______；（2）若 $g[f(x)]=2$，则 $x=$_______.

9．函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ 在区间 $[1,4]$ 上的值域为_______.

10．函数 $f(x)=x+\sqrt{2x-1}$ 的值域为_______.

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，如果 $f(x_0)=2$，那么实数 x_0 的值为（　　）

A．4　　B．0　　C．1 或 4　　D．1 或 -2

12．已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则不等式 $xf(x)+x\leqslant 2$ 的解集是_______.

13．函数 $f(x)=2^x(0<x\leqslant 3)$ 的反函数的定义域为（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(1,8]$　　C．$(0,3]$　　D．$[8,+\infty)$

14．函数 $y=|x-2|$ 的图像与函数 $y=\log_2 x$ 的图像交点的个数是（　　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

15．定义函数 $f(x)$，$g(x)$：

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	2

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是_______.

16．已知函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-2}{x+1}$，$f(3)=8\dfrac{1}{4}$.

（1）求实数 a 的值；

（2）试判断函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的单调性，并证明你的结论；

（3）求所有满足条件 $f(x)+1=0$ 的实数 x.

第 05 天　函数性质（单调性、奇偶性、反函数）

1．函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的单调递减区间为（　　）

A．$(-\infty,-3]$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$[-3,-1]$

2．若函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在 $[5,8]$ 上是单调函数，则 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,40)$　　B．$[40,64]$

C．$(-\infty,40]\cup[64,+\infty)$　　D．$[64,+\infty)$

3．函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为（　　）

A．0　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．2　　D．3

4．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在区间 $[0,+\infty)$ 为增函数，且 $f(\dfrac{1}{3})=0$，则不等式 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0$ 的解集为（　　）

A．$(\dfrac{1}{2},2)$　　B．$(2,+\infty)$

C．$(\dfrac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$　　D．$(0,\dfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

5．已知 $f(x)=ax^3+bx-4$，其中 a，b 为常数，若 $f(-2)=2$，则 $f(2)$ 的值等于（　　）

A．-2　　B．-4　　C．-6　　D．-10

6．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$（m 为实数）为偶函数，记 $a=f(\log_{0.5}3)$，$b=f(\log_2 5)$，$c=f(2m)$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<a<b$　　D．$c<b<a$

7．函数 $f(x)=x^2-|x|$ 的单调递减区间是_______.

8．奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数，在区间 $[3,6]$ 上最大值是 4，最小值是 -1，则 $2f(-6)+f(-3)=$_______.

9．已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图像上，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_______.

10．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x(1+x)$．求函数的解析式.

11．已知二次函数 $f(x)=x^2-mx+1$，

（1）若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，求实数 m 的取值范围；

（2）若函数 $g(x)=f(x)+(2m-1)x-9$，且 $\forall m\in[-1,3]$，都有 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立，求实数 x 的取值范围；

（3）若函数 $h(x)=f(x)-(1-m)x^2+2x$，求函数 $y=h(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 的最小值 $H(m)$.

第 06 天　二次函数

1．函数 $y=-x^2-2x-8$ 的最大值是（　　）

A．-8　　B．-7　　C．-6　　D．不确定

2．已知二次函数 $y=ax^2-4x+1$ 有最小值 -1，则 a 的值为（　　）

A．2　　B．-2

C．2 或 -2　　D．以上答案都不对

3．已知 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{2}$，则函数 $f(x)=x^2+x+1$（　　）

A．有最小值 $-\dfrac{3}{4}$，无最大值　　B．有最小值 $\dfrac{3}{4}$，最大值 1

C．有最小值 1，最大值 $\dfrac{19}{4}$　　D．无最小值和最大值

4．“$a=2$”是“函数 $f(x)=x^2+2ax-2$ 在区间 $(-\infty，-2]$ 内单调递减”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知二次函数 $f(x)=ax^2+2x+c(x\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0，+\infty)$，则 $a+c$ 的最小值是（　　）

A．2　　B．$4\sqrt{2}$　　C．4　　D．$2\sqrt{2}$

6. 已知关于 x 的方程 $x^2-2mx+m-3=0$ 的两个实数根 x_1，x_2 满足 $x_1\in(-1，0)$，$x_2\in(3，+\infty)$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(\dfrac{2}{3}，3)$　　B．$(\dfrac{6}{5}，3)$

C．$(\dfrac{2}{3}，\dfrac{6}{5})$　　D．$(-\infty，\dfrac{2}{3})$

7．若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 $A(-2，0)$，$B(4，0)$，且函数的最大值为 9，则这个二次函数的表达式是________.

8．已知函数 $f(x)=x^2-2x$，$g(x)=ax+2(a>0)$，对任意的 $x_1\in[-1，2]$，存在 $x_0\in[-1，2]$，使 $g(x_1)=f(x_0)$，则 a 的取值范围是________.

9．已知函数 $f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ 在闭区间 $[0，2]$ 上有最小值 3，求实数 a 的值.

10． 求函数 $y=4^x-2^{x+1}+3$，$x\in(-\infty，1]$ 的值域和单调区间.

第 07 天　指数函数

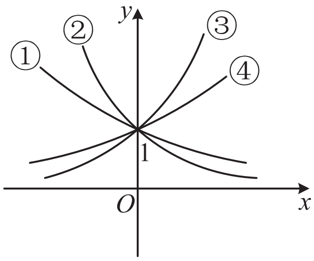
1．若 $2<a<3$，化简 $\sqrt{(2-a)^2}+\sqrt[4]{(3-a)^4}$ 的结果是（　　）

A． $5-2a$　　B． $2a-5$　　C． 1　　D． -1

2．设 $2^a=5^b=m$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 m 等于（　　）

A． $\sqrt{10}$　　B． 10　　C． 20　　D． 100

3．如图是指数函数① $y=a^x$，② $y=b^x$，③ $y=c^x$，④ $y=d^x$ 的图象，则 a，b，c，d 与1的大小关系是（　　）



A． $a<b<1<c<d$　　B． $b<a<1<d<c$

C． $1<a<b<c<d$　　D． $a<b<1<d<c$

4．函数 $y=(\frac{1}{2})^x-2$ 的图象必过（　　）

A．第一、二、三象限　　B．第一、二、四象限

C．第一、三、四象限　　D．第二、三、四象限

5．当 $x\in[-2,2)$ 时，$y=3^{-x}-1$ 的值域是（　　）

A．$(-\frac{8}{9}，8]$　　B．$[-\frac{8}{9}，8]$

C．$(\frac{1}{9}，9)$　　D．$[\frac{1}{9}，9]$

6．若 $(\frac{1}{2})^{2a+1}<(\frac{1}{2})^{3-2a}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1，+\infty)$　　B．$(\frac{1}{2}，+\infty)$

C．$(-\infty，1)$　　D．$(-\infty，\frac{1}{2})$

7．化简 $2^{-(2k+1)}-2^{-(2k-1)}+2^{-2k}$ 等于（　　）

A． 2^{-2k}　　B． $2^{-(2k-1)}$　　C． $-2^{-(2k+1)}$　　D． 2

8．函数 $f(x)=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）对任意正实数 x，y 都有（　　）

A． $f(xy)=f(x)\,f(y)$　　B． $f(xy)=f(x)+f(y)$

C． $f(x+y)=f(x)\,f(y)$　　D． $f(x+y)=f(x)+f(y)$

9．函数 $f(x)=(\frac{1}{3})^{x-1}$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的最大值是（　　）

A．1　　B．3　　C．9　　D．27

10．设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$

C．$b<a<c$　　D．$b<c<a$

11．函数 $f(x)=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a}{2}$，求 a 的值．

第 08 天　对数函数

1．若 $\log_3(\log_2 x)=1$，则 $x^{-\frac{1}{2}}$ 等于（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2\sqrt{3}}$　　C．$\frac{1}{2\sqrt{2}}$　　D．$\frac{1}{3\sqrt{3}}$

2．$\lg 8+3\lg 5$ 的值为（　　）

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

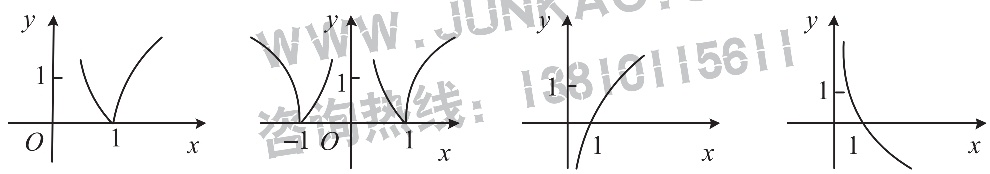
3．化简 $\frac{1}{2}\log_6 12-2\log_6\sqrt{2}$ 的结果为（　　）

A．$6\sqrt{2}$　　B．$12\sqrt{2}$　　C．$\log_6\sqrt{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

4．若 $\lg a$，$\lg b$ 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两个根，则 $(\lg\frac{a}{b})^2$ 的值等于（　　）

A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．4　　D．$\frac{1}{4}$

5．函数 $f(x)=|\log_3 x|$ 的图象是（　　）



A　　B　　C　　D

6．设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 2$，$c=\log_2 3$，则（　　）

A．$a>c>b$　　B．$b>c>a$　　C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

7．函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x+12)$ 的单调递减区间是（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-2,2)$　　D．$(-2,6)$

8．若$\log_a \frac{2}{3} \geqslant 1$（$a>0$，且$a \neq 1$），则$a$的取值范围为（　　）

A．$[\frac{2}{3}, +\infty)$　　B．$(1, +\infty)$　　C．$[\frac{2}{3}, 1)$　　D．$[\frac{3}{2}, +\infty)$

9．已知集合$A=\{y \mid y=\log_2 x, x>1\}$，$B=\{y \mid y=(\frac{1}{2})^x, x>1\}$，则$A \cap B=$（　　）

A．$\{y \mid 0<y<\frac{1}{2}\}$　　B．$\{y \mid 0<y<1\}$

C．$\{y \mid \frac{1}{2}<y<1\}$　　D．$\varnothing$

10．函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)$的值域是（　　）

A．$\mathbf{R}$　　B．$(-\infty, -3]$

C．$[8, +\infty)$　　D．$[3, +\infty)$

11．若$a>0$且$a \neq 1$，则函数$y=\log_a(x-1)+1$的图象恒过定点_______.

12．已知$f(x)=\log_a(3-ax)$在$x \in [0, 2]$上单调递减，则a的取值范围是_______.

13．已知x满足不等式：$2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+7\log_{\frac{1}{2}} x+3 \leqslant 0$，求函数$f(x)=(\log_2 \frac{x}{4}) \cdot (\log_2 \frac{x}{2})$的最大值和最小值.

第 09 天　函数经典例题（1）

1．设函数$f(x)=\log_a(x+b)$（$a>0$，$a \neq 1$）的图象过点$(0, 0)$，其反函数的图象过点$(1, 2)$，则$a+b$等于（　　）

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

2．函数$y=\frac{x-2}{2x-1}(x \neq \frac{1}{2})$的反函数是（　　）

A．$y=\frac{2x-1}{x+2}(x \neq -2)$　　B．$y=\frac{x-2}{2x-1}(x \neq \frac{1}{2})$

C．$y=\frac{x+1}{2x-1}(x \neq \frac{1}{2})$　　D．$y=\frac{2x-1}{x-2}(x \neq 2)$

3．设函数$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x \leqslant 1 \\ x^2+x-2, & x>1 \end{cases}$，则$f(\frac{1}{f(2)})$的值为（　　）

A．$\frac{15}{16}$　　B．$-\frac{27}{16}$　　C．$\frac{8}{9}$　　D．18

4．已知$0<a<1$，$x=\log_a \sqrt{2}+\log_a \sqrt{3}$，$y=\frac{1}{2}\log_a 5$，$z=\log_a \sqrt{21}-\log_a \sqrt{3}$，则（　　）

A．$x>y>z$　　B．$z>y>x$　　C．$y>x>z$　　D．$z>x>y$

5．下列函数中，满足“对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$”的是（　　）

A．$f(x)=\dfrac{1}{x}$　　　　B．$f(x)=(x-1)^2$

C．$f(x)=e^x$　　　　D．$f(x)=\ln(x+1)$

6．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为_______.

7．$\log_{\sqrt{2}+1}(3-2\sqrt{2})$ 的值为_______.

8．若函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)$（常数 a，$b\in\mathbf{R}$）是偶函数，且它的值域为 $(-\infty,4]$，则该函数的解析式为_______.

9．若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是_______.

10．方程 $\dfrac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$ 的解是_______.

11．求解方程：$\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x-1}-\dfrac{1}{3})=2$.

12．解方程：$\sqrt{25^{x^2+x-0.5}}=\sqrt[4]{5}$

第 10 天　函数经典例题（2）

1．设 $a=\log_{\frac{1}{2}}\tan 70^\circ$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\sin 25^\circ$，$c=(\dfrac{1}{2})^{\cos 25^\circ}$，则有（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$a<c<b$　　D．$c<b<a$

2．设 $a>0$，$a\neq 1$，函数 $y=\log_a x$ 的反函数与 $y=\log_a\dfrac{1}{x}$ 的反函数的图象关于（　　）

A．x 轴对称　　B．y 轴对称　　C．$y=x$ 轴对称　　D．原点对称

3．设 $a=2^{0.3}$，$b=0.3^2$，$c=\log_x(x^2+3)(x>1)$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．$a<b<c$　　B．$b<c<a$　　C．$c<b<a$　　D．$b<a<c$

4．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，它在 $[0,+\infty)$ 上递减，那么一定有_______.

A．$f(-2)\geqslant f(a^2-2a+3)$　　B．$f(-2)>f(a^2-2a+3)$

C．$f(-2)<f(a^2-2a+3)$　　D．$f(-2)\leqslant f(a^2-2a+3)$

5．在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=f(2-x)$，若 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是减函数，则函数 $f(x)$（　　）

A．在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，区间 $[3,4]$ 上是增函数

B．在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，区间 $[3,4]$ 上是减函数

C．在区间 $[-2,-1]$ 上是减函数，区间 $[3,4]$ 上是增函数

D．在区间$[-2,-1]$上是增函数，区间$[3,4]$上是减函数

6．记$f(x)=\log_3(x+1)$的反函数为$y=f^{-1}(x)$，则方程$f^{-1}(x)=8$的解$x=$_______.

7．若$f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$是奇函数，则$a=$_______.

8．若函数$f(x)=x+1$，$g(x)=\sqrt{x}$，$\varphi(x)=e^x$，则函数$g\{\varphi^{-1}[f(x)]\}$的定义域是_______.

9．已知$f(x)=\begin{cases}\log_3 x, & x>0\\ a^x+b, & x\leqslant 0\end{cases}$，且$f(0)=2$，$f(-1)=3$，则$f[f(-3)]=$_______.

10．设$f(x)$是$(x^2+\dfrac{1}{2x})^6$展开式的中间项，若$f(x)\leqslant mx$在区间$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$上恒成立，则实数$m$的取值范围是_______.

11．若a，b为方程$x^2-\sqrt{10}x+2=0$的两根，则$\log_4\dfrac{a^2-ab+b^2}{|a-b|}$的值为_______.

12．解方程：$\lg(8+2^{x+1})=2x(1-\lg 5)$.

第二章　函　数

第 04 天　函数概念（定义域、对应律、值域、分段函数）

1.【答案】D

【详解】由 $\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $0\leqslant x\leqslant 1$．

2.【答案】D

【详解】由题函数解析式：$f(2)=f(2-1)=f(1)=f(0)=-2$．

3.【答案】C

【详解】由题意，得 $f(1)=2$，$f(f(1))=f(2)=2^2+2a=4a$，解得 $a=2$．

4.【答案】A

【详解】∵ $f(a)=-3$，

∴当 $a\leqslant 1$ 时，$f(a)=2^{a-1}-2=-3$，则 $2^{a-1}=-1$，此等式显然不成立，

当 $a>1$ 时，$-\log_2(a+1)=-3$，解得 $a=7$，

∴ $f(6-a)=f(-1)=2^{-1-1}-2=-\dfrac{7}{4}$．

【点评】考查分段函数求值.

5.【答案】C

【详解】$f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$，$f(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{2}{3}$．

【点评】考查复合函数的对应律.

6.【答案】B

【详解】函数 $f(x)=x^2+2x(-2\leqslant x\leqslant 1$且$x\in\mathbf{Z})$，所以 $x=-2$，-1，0，1；对应的函数值分别为：0，-1，0，3；所以函数的值域为：$\{-1，0，3\}$．

7.【答案】A

【详解】$-2\leqslant x\leqslant 3\Rightarrow -1\leqslant x+1\leqslant 4$．所以 $y=f(x)$ 的定义域为$[-1，4]$

$-1\leqslant 2x-1\leqslant 4\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 所以 $y=f(2x-1)$ 的定义域为$[0，\dfrac{5}{2}]$.

【点评】考查复合函数的定义域.

8.【答案】（1）1（2）1

【详解】

（1）由表知 $g(1)=3$，∴ $f[g(1)]=f(3)=1$；

（2）由表知 $g(2)=2$，又 $g[f(x)]=2$，得 $f(x)=2$，再由表知 $x=1$．

9.【答案】$[\frac{3}{2},\frac{9}{5}]$

【详解】$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2x+2-1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$ 在 $[1,4]$ 上单调递增，所以函数最小值为 $f(1)=\frac{3}{2}$，最大值为 $f(4)=\frac{9}{5}$，所以值域为 $[\frac{3}{2},\frac{9}{5}]$.

10.【答案】$[\frac{1}{2},+\infty)$

【详解】令 $t=\sqrt{2x-1}(t\geqslant 0)$，则 $x=\frac{t^2+1}{2}$，$y=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数，则 $y\geqslant\frac{1}{2}$，即函数的值域为 $[\frac{1}{2},+\infty)$.

11.【答案】D

【详解】本题 $f(x)$ 为分段函数，要分别计算每段.

若 $2^{x_0}=2$，则 $x_0=1$，满足 $x_0\geqslant 0$．若 $-x_0=2$，则 $x_0=-2$，满足 $x_0<0$.

所以，实数 x_0 的值为 1 或 -2.

【点评】考查分段函数的对应律，注意分类讨论.

12.【详解】原不等式等价于 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x+x\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\x\cdot 0+x\leqslant 2\end{cases}$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x<0$，所以解集为 $(-\infty,1]$.

【点评】考查分段函数的对应律，注意讨论.

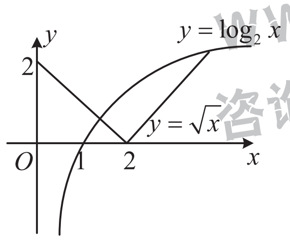
13.【答案】B

【详解】反函数的定义域就是原函数 $f(x)=2^x(0<x\leqslant 3)$ 的值域；

又原函数 $f(x)=2^x(0<x\leqslant 3)$ 是单调递增函数，$\therefore 2^0<f(x)\leqslant 2^3\Leftrightarrow 1<f(x)\leqslant 8$.

14.【答案】C

【详解】画出两个函数的图像，有 2 个交点.



15.【答案】2

【详解】

$x=1$，$f[g(x)]>g[f(x)]\Leftrightarrow f[g(1)]>g[f(1)]\Leftrightarrow f[3]>g[1]\Leftrightarrow 2>3$

$x=2$，$f[g(x)]>g[f(x)]\Leftrightarrow f[g(2)]>g[f(2)]\Leftrightarrow f[2]>g[3]\Leftrightarrow 3>1$

$x=3$，$f[g(x)]>g[f(x)]\Leftrightarrow f[g(3)]>g[f(3)]\Leftrightarrow f[1]>g[2]\Leftrightarrow 1>2$

只有 $x=2$ 满足不等式.

16.【详解】

（1） $f(3)=8\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^3+\frac{3-2}{3+1}=\frac{33}{4}\Leftrightarrow a^3=8\Leftrightarrow a=2$.

（2）断言 $f(x)=2^x+\frac{x-2}{x+1}=2^x+1-\frac{3}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

证明如下：设 $-1<x_1<x_2<+\infty$

$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}+\frac{x_1-2}{x_1+1})-(2^{x_2}+\frac{x_2-2}{x_2+1})=(2^{x_1}-2^{x_2})+\frac{3(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)}$

$\because -1<x_1<x_2<+\infty$，$\therefore 2^{x_1}<2^{x_2}$，$x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$

$\therefore 2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$\frac{3(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)}<0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

所以 $f(x)=2^x+\frac{x-2}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

（3）当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，

$\because f(x)=2^x+\frac{x-2}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调增，

$\therefore f(x)+1=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上至多有一个实根.

又 $\because f(0)+1=2^0+\frac{0-2}{0+1}+1=0$，

$\therefore f(x)+1=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有且仅有一个实根 $x=0$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，

$\because 2^x>0$，$1>0$，$x+1<0$，$x-2<0$，

$\therefore \frac{x-2}{x+1}>0$，$\therefore f(x)+1=2^x+\frac{x-2}{x+1}+1>0$，

$\therefore f(x)+1=0$ 在 $(-\infty,-1)$ 上无实根.

综上所述，$f(x)+1=0$ 有且仅有一个实根 $x=0$.

第 05 天　函数性质（单调性、奇偶性、反函数）

1.【答案】A

【详解】该函数的定义域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$，函数 $f(x)=x^2+2x-3$ 的对称轴为 $x=-1$，由函数的单调性可知该函数在区间 $(-\infty,-3]$ 上是减函数.

2.【答案】C

【详解】对称轴为 $x=\frac{k}{8}$，则 $\frac{k}{8}\leqslant 5$ 或 $\frac{k}{8}\geqslant 8$，解得 $k\leqslant 40$ 或 $k\geqslant 64$.

3.【答案】B

【详解】函数 $y=x$ 在$[1,2]$上是增函数，函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在$[1,2]$上是增函数，

∴函数 $y=x-\dfrac{1}{x}$ 在$[1,2]$上是增函数．当 $x=2$ 时，$y_{max}=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$．

4.【答案】D

【详解】根据 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，在区间$[0,+\infty)$为增函数，$f(\dfrac{1}{3})=0$，根据图象关于 y 轴对称可知，$f(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$ 或 $x<-\dfrac{1}{3}$．

所以 $f(\log_{\frac{1}{8}}x)>0\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{8}}x>\dfrac{1}{3}$ 或 $\log_{\frac{1}{8}}x<-\dfrac{1}{3}$，解得 $x\in(0,\dfrac{1}{2})\cup(2,+\infty)$．

5.【答案】D

【详解】∵ $f(x)=ax^3+bx-4$

∴ $f(-2)=-8a-2b-4=2$

设 $f(2)=\ 8a+2b-4=k$

两式相加得 $-8=2+k\Rightarrow k=-10$

【点评】考查函数的奇偶性．

6.【答案】C

【详解】因为函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ 为偶函数，所以 $m=0$，即 $f(x)=2^{|x|}-1$，

所以 $a=f(\log_{0.5}3)=f(\log_2\dfrac{1}{3})=2^{|\log_2\frac{1}{3}|}-1=2^{\log_2 3}-1=3-1=2$，

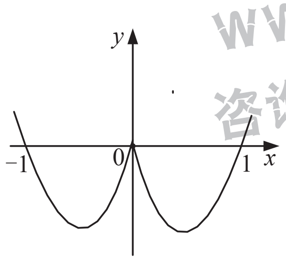
$b=f(\log_2 5)=2^{\log_2 5}-1=4$，$c=f(2m)=f(0)=2^0-1=0$，

所以 $c<a<b$．

【点评】考查函数的奇偶性和函数的图像．

7.【答案】$(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$，$[0,\dfrac{1}{2}]$

【详解】函数 $f(x)=x^2-|x|$ 是把 $f(x)=x^2-x$ 去左翻右，根据下图可求解．



【点评】考查函数的单调性．

8.【答案】-7

【详解】由题意可知．$f(-6)=-f(6)=-4$，$f(-3)=-f(3)=1$，

∴ $2f(-6)+f(-3)=-7$．

【点评】考查函数的单调性、奇偶性.

9.【答案】$\log_2(x-1)$

【详解】将点(3，9)代入函数 $f(x)=1+a^x$ 中得 $a=2$，所以 $f(x)=1+2^x$，用 y 表示 x，得 $x=\log_2(y-1)$，所以 $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)$.

10.【详解】

据已知，当 $x\geqslant 0$ 时， $f(x)=x(1+x)$，

当 $x<0$ 时， $-x>0$，则 $f(x)=-f(-x)=-[-x(1-x)]=x(1-x)$，

所以函数的解析式为 $f(x)=\begin{cases}x(1+x), & x\geqslant 0\\ x(1-x), & x<0\end{cases}$.

【点评】考查函数的奇偶性.

11.【详解】

(1) 函数 $y=f(x)$ 是偶函数 $\therefore f(-x)=f(x)$

$\therefore x^2+mx+1=x^2-mx+1$

$\therefore 2mx=0 \therefore m=0$

(2) $g(x)=x^2+(m-1)x-8$

$\because \forall m\in[-1,3]$，都有 $g(x)\leqslant 0$ 恒成立

$\therefore \begin{cases}x^2-2x-8\leqslant 0\\ x^2+2x-8\leqslant 0\end{cases}$ $\therefore$ 实数 x 的取值范围 $[-2,2]$

(3) $h(x)=mx^2+(2-m)x+1$

①当 $0<m<\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $y=h(x)$ 的对称轴 $x=\dfrac{m-2}{2m}<-1$，

$\therefore$ 函数 $y=h(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 的最小值 $H(m)=h(-1)=2m-1$

②当 $m\geqslant\dfrac{2}{3}$ 时，函数 $y=h(x)$ 的对称轴 $x=\dfrac{m-2}{2m}\in[-1,1]$，

$\therefore$ 函数 $y=h(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 的最小值 $H(m)=h(\dfrac{m-2}{2m})=2-\dfrac{m}{4}-\dfrac{1}{m}$

③当 $m<0$ 时，函数 $y=h(x)$ 的对称轴 $x=\dfrac{m-2}{2m}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{m}>0$，

$\therefore$ 函数 $y=h(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 的最小值 $H(m)=h(-1)=2m-1$

④当 $m=0$ 时，函数 $y=h(x)=2x+1$

$\therefore$ 函数 $y=h(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 的最小值 $H(m)=h(-1)=-1$

综上： $H(m)=\begin{cases}2m-1, & m<\dfrac{2}{3}\\ 2-\dfrac{m}{4}-\dfrac{1}{m}, & m\geqslant\dfrac{2}{3}\end{cases}$

第06天　二次函数

1.【答案】B

【详解】$y=-(x+1)^2-7\leqslant -7$ 该二次函数的图像即抛物线开口向下，有最大值 -7.

【点评】考查二次函数.

2.【答案】A

【详解】二次函数 $y=ax^2-4x+1$ 的最小值 $\dfrac{4a-(-4)^2}{4a}=-1$，得 $a=2$.

【点评】考查二次函数.

3.【答案】C

【详解】$f(x)=x^2+x+1=(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}$，

画出该函数的图象知，$f(x)$ 在区间 $[0,\dfrac{3}{2}]$ 上是增函数，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$，$f(x)_{\max}=f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{19}{4}$.

【点评】考查二次函数.

4.【答案】A

【详解】函数 $f(x)=x^2+2ax-2$ 在区间 $(-\infty,-2]$ 内单调递减” $\Leftrightarrow -a\geqslant -2 \Leftrightarrow a\leqslant 2$，所以“$a=2$”是“函数 $f(x)=x^2+2ax-2$ 在区间内单调递减”的充分不必要条件.

5.【答案 A

【详解】由题二次函数 $f(x)=ax^2+2x+c(x\in\mathbf{R})$ 的值域为 $[0,+\infty)$，

$\therefore \begin{cases} a>0 \\ \dfrac{4ac-4}{4a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ ac=1 \end{cases}$，$\therefore a+c\geqslant 2\sqrt{ac}=2$，当且仅当 $a=c=1$ 时取等号.

6.【答案】B

【详解】设 $f(x)=x^2-2mx+m-3$，由题意可知：

$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(3)<0 \\ f(-1)>0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} m-3<0 \\ 9-6m+m-3<0 \\ 1+2m+m-3>0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} m<3 \\ m>\dfrac{6}{5} \\ m>\dfrac{2}{3} \end{cases}$，$\therefore \dfrac{6}{5}<m<3$.

7.【答案】$y=-(x+2)(x-4)$

【详解】设 $y=a(x+2)(x-4)$，对称轴 $x=1$.

当 $x=1$ 时，$y_{\max}=-9a=9$，$a=-1$.

【点评】考查二次函数.

8.【答案】$(0,\frac{1}{2}]$

【详解】$x\in[-1,2]$时，函数$f(x)=x^2-2x$的值域为$A=[-1,3]$，

$x\in[-1,2]$时，$g(x)=ax+2(a>0)$的值域为$B=[2-a,2+2a]$，

由题意$B\subseteq A$，则有$\begin{cases}2-a\geqslant-1\\2+2a\leqslant3\end{cases}$，又$a>0$，故解得$0<a\leqslant\frac{1}{2}$.

9.【详解】$f(x)=4(x-\frac{a}{2})^2+2-2a$

（1）当$\frac{a}{2}<0$即$a<0$时，$f(x)_{\min}=f(0)=a^2-2a+2=3$，解得：$a=1-\sqrt{2}$；

（2）$0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant2$即$0\leqslant a\leqslant4$时，$f(x)_{\min}=f(\frac{a}{2})=2-2a=3$，解得：$a=-\frac{1}{2}$（舍去）；

（3）$\frac{a}{2}>2$即$a>4$时，$f(x)_{\min}=f(2)=a^2-10a+18=3$，解得：$a=5+\sqrt{10}$；

综上可知：a的值为$1-\sqrt{2}$或$5+\sqrt{10}$.

【点评】考查二次函数.

10.【详解】

$y=2^{2x}-2\cdot2^x+3$，令$t=2^x$，$x\in(-\infty,1]$，

$\therefore t\in(0,2]$，$\therefore y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$，

当$t=1$时，$y_{\min}=2$；

当$t=2$时，$y_{\max}=2^2-2\times2+3=3$，

$\therefore$函数$y=4^x-2^{x+1}+3$，$x\in(-\infty,1]$值域为$[2,3]$.

当$1\leqslant t\leqslant2$时，$1\leqslant2^x\leqslant2$，$0\leqslant x\leqslant1$，当$0<t<1$时，$0<2^x<1$，$x<0$，

$\because y=(t-1)^2+2$在$[1,+\infty)$上递增，$t=2^x$在$[0,1]$上递增，

$\therefore y=2^{2x}-2\cdot2^x+3$的单调递增区间为$[0,1]$；

$\because y=(t-1)^2+2$，在$(0,1]$上递减，$t=2^x$在$(-\infty,0]$上递增，

$\therefore y=2^{2x}-2\cdot2^x+3$的单调递减区间为$(-\infty,0]$.

【点评】考查对指数函数的理解.

第07天　指数函数

1.【答案】C

【详解】原式$=|2-a|+|3-a|$，

$\because 2<a<3$，$\therefore$原式$=a-2+3-a=1$.

2.【答案】A

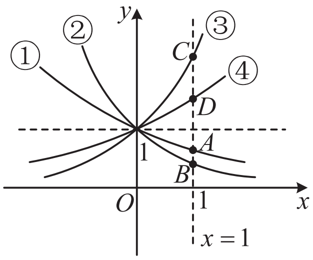
【详解】$\because 2^a=m$，$5^b=m$，$\therefore 2=m^{\frac{1}{a}}$，$5=m^{\frac{1}{b}}$，$\because 2\times5=m^{\frac{1}{a}}\cdot m^{\frac{1}{b}}=m^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\therefore m^2=10$，$\therefore m=\sqrt{10}$.

3.【答案】B

【详解】

作直线 $x=1$，与四个图象分别交于 A、B、C、D 四点，由于 $x=1$ 代入各个函数可得函数值等于底数的大小，所以四个交点的纵坐标越大，则底数越大，由图可知 $b<a<1<d<c$.



4.【答案】D

【详解】函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象上所有的点向下平移2个单位，就得到函数 $y=(\frac{1}{2})^x-2$ 的图象，所以观察 $y=(\frac{1}{2})^x-2$ 的图象知．函数 $y=(\frac{1}{2})^x-2$ 的图象必过第二、三、四象限.

5.【答案】A

【详解】 $y=3^{-x}-1$，$x\in[-2,2)$ 上是减函数，$\therefore 3^{-2}-1<y\leqslant 3^2-1$，即 $-\frac{8}{9}<y\leqslant 8$.

6.【答案】B

【详解】原式等价于 $2a+1>3-2a$，解得 $a>\frac{1}{2}$.

7.【答案】C

【详解】 $2^{-(2k+1)}-2^{-(2k+1)+2}+2^{-(2k+1)+1}=2^{-(2k+1)}-2^2\cdot 2^{-(2k+1)}+2\cdot 2^{-(2k+1)}=-2^{-(2k+1)}$.

【点评】考查指数的常用公式.

8.【答案】C

【详解】 $f(x+y)=a^{x+y}=a^xa^y=f(x)\ f(y)$.

【点评】考查指数的常用公式.

9.【答案】D

【详解】当 $x=-2$ 时，$f(x)_{\max}=f(-2)=(\frac{1}{3})^{-2-1}=27$.

【点评】考查利用函数的单调性求值域.

10.【答案】C

【详解】由 $y=0.6^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 是单调减函数可知，

$0<0.6^{1.5}<0.6^{0.6}<1$，又 $1.5^{0.6}>1$.

【点评】考查指数不等式.

11.【详解】①若 $a>1$，则 $f(x)$ 是增函数，

$\therefore f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 $f(2)$，最小值为 $f(1)$.

$\therefore f(2)-f(1)=\dfrac{a}{2}$，即 $a^2-a=\dfrac{a}{2}$．解得 $a=\dfrac{3}{2}$．

②若 $0<a<1$，则 $f(x)$是减函数，

$\therefore f(x)$在$[1，2]$上的最大值为 $f(1)$，最小值为 $f(2)$，

$\therefore f(1)-f(2)=\dfrac{a}{2}$，即 $a-a^2=\dfrac{a}{2}$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$

综上所述，$a=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=\dfrac{3}{2}$．

第 08 天　对数函数

1．【答案】C

【详解】$\because \log_3(\log_2 x)=1$，$\therefore \log_2 x=3$，

$\therefore x=2^3=8$，则 $x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$．

2．【答案】D

【详解】$\lg 8+3\lg 5=\lg 8+\lg 5^3=\lg 8+\lg 125=\lg(8\times 125)=\lg 1000=3$．

3．【答案】C

【详解】原式$=\log_6\sqrt{12}-\log_6 2=\log_6\dfrac{\sqrt{12}}{2}=\log_6\sqrt{3}$．

4．【答案】A

【详解】由根与系数的关系，得$\begin{cases}\lg a+\lg b=2\\ \lg a\bullet\lg b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\therefore (\lg\dfrac{a}{b})^2=(\lg a-\lg b)^2=(\lg a+\lg b)^2-4\lg a\bullet\lg b=2^2-4\times\dfrac{1}{2}=2$．

5．【答案】A

【详解】$y=|\log_3 x|$的图象是保留 $y=\log_3 x$ 的图象位于 x 轴上半平面的部分（包括与 x 轴的交点），而把下半平面的部分沿 x 轴翻折到上半平面而得到的．

6．【答案】D

【详解】$a=\log_3 2<\log_3 3=1$；$c=\log_2 3>\log_2 2=1$，

由对数函数的性质可知 $\log_5 2<\log_3 2$，$\therefore b<a<c$．

7．【答案】C

【详解】$y=\log_{\frac{1}{3}} u$，$u=-x^2+4x+12$．

令 $u=-x^2+4x+12>0$，得 $-2<x<6$．

$\therefore x\in(-2，2)$时，$u=-x^2+4x+12$ 为增函数，

$\because y=\log_{\frac{1}{3}} u$ 为减函数，

∴函数的单调减区间是$(-2，2)$.

8.【答案】C

【详解】$\log_a \frac{2}{3} \geqslant \log_a a$，

当$a>1$时，得$a\leqslant\frac{2}{3}$，与$a>1$矛盾；

当$0<a<1$时，得$\frac{2}{3}\leqslant a$，得$\frac{2}{3}\leqslant a<1$.

9.【答案】A

【详解】当$x>1$时，$\log_2 x>0$，即$A=\{y\,|\,y>0\}$，

当$x>1$时，$0<(\frac{1}{2})^x<\frac{1}{2}$，即$B=\{y\,|\,0<y<\frac{1}{2}\}$，得$A\bigcap B=\{y\,|\,0<y<\frac{1}{2}\}$.

【点评】考查对数函数.

10.【答案】B

【详解】$x^2-6x+17=(x-3)^2+8\geqslant 8$，

而$0<\frac{1}{2}<1$，$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+17)\leqslant\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$.

【点评】考查利用对数函数的单调性求值域.

11.【答案】$(2，1)$

【详解】函数图象过定点，则与a无关，故$\log_a(x-1)=0$，

$\therefore x-1=1$，$x=2$，$y=1$，所以$y=\log_a(x-1)+1$过定点$(2，1)$.

12.【答案】$1<a<\frac{3}{2}$

【详解】由$a>0$可知$u=3-ax$为减函数，依题意则有$a>1$.

又$u=3-ax$在$[0，2]$上应满足$u>0$，

故$3-2a>0$，即$a<\frac{3}{2}$.

综上可得，a的取值范围是$1<a<\frac{3}{2}$.

13.【详解】由$2(\log^{\frac{1}{2}} x)^2+7\log^{\frac{1}{2}} x+3\leqslant 0$，

可解得$-3\leqslant\log_{\frac{1}{2}} x\leqslant-\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 3$.

$\because f(x)=(\log_2 x-2)(\log_2 x-1)=(\log_2 x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}$，

∴当$\log_2 x=\frac{3}{2}$，即$x=2\sqrt{2}$时，$f(x)$有最小值$-\frac{1}{4}$.

当$\log_2 x=3$，即$x=8$时，$f(x)$有最大值2.

$\therefore f(x)_{min}=-\dfrac{1}{4}$，$f(x)_{max}=2$.

第 09 天　函数经典例题（1）

1.【答案】C

【详解】由反函数的图象过点(1，2)，则知原函数的图象过点(2，1)，得$\begin{cases}\log_a b=0\\ \log_a(2+b)=1\end{cases}$，则 $b=1$，$a=3$，得 $a+b=4$.

【点评】本题考查原函数和反函数图像关于 $y=x$ 对称，即原函数过点（a，b），则反函数过（b，a）.

2.【答案】B

【详解】由 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$，得 $x=\dfrac{y-2}{2y-1}$（$y\neq\dfrac{1}{2}$），即反函数为 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$（$x\neq\dfrac{1}{2}$）.

【点评】本题考查了求反函数的步骤：反解、改写、求定义域.

3.【答案】A

【详解】显然 $f(2)=2^2+2-2=4$，得 $\dfrac{1}{f(2)}=\dfrac{1}{4}$，$f(\dfrac{1}{f(2)})=f(\dfrac{1}{4})=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$.

【点评】本题考查分段函数的求值的方法.

4.【答案】C

【详解】由对数运算法则 $x=\log_a\sqrt{6}$，$y=\log_a\sqrt{5}$，$z=\log_a\sqrt{7}$，而 $0<a<1$，函数 $y=\log_a x$ 是减函数，$\sqrt{7}>\sqrt{6}>\sqrt{5}$，$\therefore y>x>z$.

【点评】本题考查对数函数的单调性及基本运算公式.

5.【答案】A

【详解】据题设，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

【点评】本题考查函数的单调性的定义.

6.【答案】$[3,+\infty)$

【详解】要使函数有意义，只需$\begin{cases}|x-2|-1\geqslant 0\\ \log_2(x-1)\neq 0\\ x-1>0\end{cases}$，得$\begin{cases}x\geqslant 3，\text{或}x\leqslant 1\\ x-1\neq 1\\ x>1\end{cases}$，即$\begin{cases}x\geqslant 3，\text{或}x\leqslant 1\\ x\neq 2\\ x>1\end{cases}$

即 $x\geqslant 3$.

【点评】本题考查解绝对值不等式，对数不等式，不等式交并的运算.

7.【答案】-2

【详解】$\log_{\sqrt{2}+1}(3-2\sqrt{2})=\log_{\sqrt{2}+1}\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\log_{\sqrt{2}+1}\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}=\log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}+1)^{-2}=-2$.

【点评】本题考查对数的运算.

8.【答案】 $f(x)=-2x^2+4$

【详解】函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)=bx^2+(2a+ab)\ x+2a^2$；

而函数是偶函数，则 $2a+ab=0\Leftrightarrow a=0或b=-2$.

当 $a=0$ 时， $f(x)=bx^2$，不能满足它的值域为 $(-\infty，4]$，

于是 $b=-2$，而该二次函数为 $f(x)=-2x^2+2a^2\leqslant 2a^2$，即最大值 $2a^2=4$，该函数的解析式

为 $f(x)=-2x^2+4$.

【点评】注意由 $2a+ab=0$ 不能立即得出 $b=-2$，必须经过讨论排除 $a=0$.

9.【答案】$[0，1)$

【详解】要使 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 有意义，必须 $\begin{cases}0\leqslant 2x\leqslant 2\\ x-1\neq 0\end{cases}$，即 $0\leqslant x<1$.

【点评】本题考查抽象函数的定义域．要点： $f(x)$ 中的 x 与 $f(2x)$ 中的 $2x$ 范围相同.

10.【答案】 -1

【详解】设 $t=3^x$，则原方程化作 $\dfrac{1+\frac{1}{t}}{1+t}=3$ 整理得 $3t^2+2t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$，或$t=-1$（舍去）即

$3^x=\dfrac{1}{3}=3^{-1}$ 所以 $x=-1$.

【点评】本题考查利用换元法解指数方程.

11.【详解】

原方程变形为 $\log_3(3^x-1)\log_3[\dfrac{1}{3}\bullet(3^x-1)]=2$， $\log_3(3^x-1)[\log_3(3^x-1)-1]=2$，

即 $[\log_3(3^x-1)]^2-\log_3(3^x-1)-2=0$，

设 $y=\log_3(3^x-1)$，原方程可化为： $y^2-y-2=0$，解得 $y=-1$ 或 $y=2$，

即 $\log_3(3^x-1)=-1$，或 $\log_3(3^x-1)=2$，即 $3^x-1=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$ 或 $3^x-1=3^2=9$

于是 $3^x=\dfrac{4}{3}$，或 $3^x=10$，解得 $x=\log_3\dfrac{4}{3}=\log_3 4-1$ 或 $x=\log_3 10$，

经检验他们都是原方程的解.

所以原方程的解集为 $\{x\mid x=\log_3 4-1或x=\log_3 10\}$.

【点评】本题涉及指数对数运算、解一元二次方程、指数方程、对数方程，重点考查换元解对数方程.

12.【详解】原方程化作 $5^{x^2+x-0.5}=5^{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow x^2+x-0.5=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x^2+4x-3=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=-\dfrac{3}{2}$． $\therefore$原方程的解集为 $\{\dfrac{1}{2}，-\dfrac{3}{2}\}$.

【点评】在代数中，式子的恒等变形能力很重要.

第 10 天　函数经典例题（2）

1.【答案】C

【详解】∵ $\tan 70^\circ > \tan 45^\circ = 1$，∴ $a=\log_{\frac{1}{2}}\tan 70^\circ < \log_{\frac{1}{2}}\tan 45^\circ = 0$，

∵ $\sin 25^\circ > \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$，∴ $a=\log_{\frac{1}{2}}\sin 25^\circ > \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}=1$，而 $0<c=(\dfrac{1}{2})^{\cos 25^\circ}<(\dfrac{1}{2})^0=1$，

∴ $a<c<b$.

【点评】考查利用指数、对数函数、三角函数单调性比较大小，涉及特殊角三角函数值.

2.【答案】B

【详解】函数 $y=\log_a x$ 的反函数为 $y=a^x$，$y=\log_a\dfrac{1}{x}$ 即 $y=-\log_a x$ 的反函数为 $y=a^{-x}$，

∴图象关于 y 轴对称.

【点评】考查反函数的求法.

3.【答案】D

【详解】$1=2^0<a=2^{0.3}<2^1=2$，$0<b=0.3^2<1$，$c=\log_x(x^2+3)>\log_x x^2=2$，∴ $b<a<c$.

【点评】考查利用指数、对数单调性比较大小.

4.【答案】A

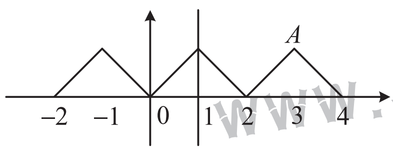
【详解】易知 $a^2-2a+3=(a-1)^2+2\geqslant 2$

∵偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递减∴ $f(-2)=f(2)\geqslant f(a^2-2a+3)$

【点评】考查利用函数的单调性比较大小.

5.【答案】D

【详解】由 $f(x)$ 是偶函数，可知 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，由 $f(x)=f(2-x)$ 可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{x+2-x}{2}=1$ 对称，



画出函数 $f(x)$ 的图象如图，由图象可知 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上是增函数，区间 $[3,4]$ 上是减函数.

【点评】考查函数的单调性和奇偶性.

6.【答案】2

【详解】$f^{-1}(x)=8 \Leftrightarrow f(8)=x$，所以 $x=\log_3(8+1)=2$.

【点评】本题考查反函数的求法：$f^{-1}(x)=8 \Leftrightarrow f(8)=x$.

7.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【详解】∵ $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$，即 $\dfrac{1}{2^{-x}-1}+a=-(\dfrac{1}{2^x-1}+a)$，

∴ $\dfrac{2^x}{1-2^x}+\dfrac{1}{2^x-1}=-2a\Leftrightarrow -1=-2a$，∴ $a=\dfrac{1}{2}$．

【点评】本题考查奇函数的判定（$f(-x)=-f(x)$），亦可用特殊值法．

8.【答案】$[0,+\infty)$

【详解】由 $\varphi(x)=e^x\Rightarrow\varphi^{-1}(x)=\ln x$

∴ $g\{\varphi^{-1}[f(x)]\}=g\{\varphi^{-1}(x+1)\}=g[\ln(x+1)]=\sqrt{\ln(x+1)}$

定义域满足：$\ln(x+1)\geqslant 0\Leftrightarrow x+1\geqslant 1\Leftrightarrow x\geqslant 0$ ∴定义域是$[0,+\infty)$．

【点评】本题涉及求定义域，解对数不等式，反函数求法．重点考查复合函数的求法．

9.【答案】2

【详解】$\begin{cases}f(0)=2\\f(-1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+b=2\\\dfrac{1}{a}+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ∴ $f(x)=\begin{cases}\log_3 x，x>0\\(\dfrac{1}{2})^x+1，x\leqslant 0\end{cases}$

$f[f(-3)]=f(9)=\log_3 9=2$．

【点评】考查利用指数函数和对数函数．

10.【答案】$[5,+\infty)$

【详解】$(x^2+\dfrac{1}{2x})^6$ 展开式的中间项为第四项，故 $f(x)=C_6^3(x^2)^3(\dfrac{1}{2x})^3=\dfrac{5}{2}x^3$，由题意 $f(x)\leqslant mx$ 在区间$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$上恒成立，即 $\dfrac{5}{2}x^3-mx=(\dfrac{5}{2}x^2-m)\ x\leqslant 0$ 在区间$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$上恒成立，注意到 $x>0$，故 $\dfrac{5}{2}x^2-m\leqslant 0$ 区间$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$上恒成立，因此 $m\geqslant\dfrac{5}{2}x^2$ 在区间$[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$上恒成立，从而 $m\geqslant(\dfrac{5}{2}x^2)_{\max}=5$（当 $x=\sqrt{2}$ 时取最大值），故 m 的取值范围为$[5,+\infty)$．

【点评】考查二次函数的最值．

11.【答案】$\dfrac{3}{4}$

【详解】由条件知∵ $\begin{cases}a+b=\sqrt{10}\\ab=2\end{cases}$ ∴ $a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=10-6=4$．

$|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{10-8}=\sqrt{2}$．

∴ $\log_4\dfrac{a^2-ab+b^2}{|a-b|}=\log_4\dfrac{4}{\sqrt{2}}=1-\log_4\sqrt{2}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$．

【点评】考查对数函数的运算．

12.【详解】原方程化作 $\lg(8+2^{x+1})=2x(\lg10-\lg5)=2x\lg2=\lg2^{2x}$ ∴ $8+2^{x+1}=2^{2x}$ 令 $2^x=y$

所以 $y^2-2y-8=0$ 解得 $y=-2$ 和 $y=4$ ∴ $2^x=-2$（无解）$2^x=4$ ∴ $x=2$

代入原方程检验知，$x=2$ 是原方程的根．

【点评】本题涉及对数运算，一元二次方程，指数方程．重点考查对数方程的解法．