大专军考突破

理科知识综合分册

崔爱功 主编

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

大专军考突破. 理科知识综合分册 / 崔爱功主编.
-- 北京：中国建材工业出版社, 2013.10
ISBN 978-7-5160-0384-8

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①崔… Ⅲ. ①科学知识—军事院校—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①E251.3②G723.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第024893号

官方网站：www.junkao.com
淘宝店铺：http:// junxiaoziliao.taobao.com
购书热线：13810115611（微信）
Q Q咨询：33869167

序 言

很多战士和家长们，想进一步了解崔爱功主编的《大专军考突破》的特点，现在简要介绍一下。这是极具原创特色的一套备考用书，注重实用性、系统性和指导性，选用该书必将给战士们备考带来很大帮助。它与其它同类资料的明显区别，主要在于如下几点：

第一，在介绍每个知识点或考点时，不照搬、不复制、不拼凑，而是各科教师用心结合了实际的军考教学实践，用通俗易懂的方式去编排、去讲解，这种符合逻辑、便于自学的科学讲解方法，贯穿始终，小到定义公式，大到题型与方法。

第二，紧跟在每个考点后面的例题示范与演练，首先是来一道最简易的考点运用（往往是直接运用，这样便于理解），然后才是增加例题难度与广度（这样便于拓宽、加深）。另外，我们把近年来的军考真题，逐一融进对应考点的后面，且配以详解和点评，既作为了这个考点的例题，又提示了它的重要性和考察方式。

第三，每章后面有“突破训练题组”，里面每道题都是精心设计的军考常考题型，题目由小到大、难度从低到高，不光是练习，也极具考试的针对性。

崔爱功主编的《大专军考突破》，是北京崔爱功军考教学团队呈现给全国考生的一套代表性作品，它融入了六科多位编者反复认真地推敲斟酌，以及夜以继日地付出心力。由于多数士兵考生文化课基础薄弱，这套资料也全面弥补了《军考教材》在讲解上的局限，会帮助不同层次的考生，去高效率复习与提高。

我们对本丛书进行了系统的编、审、校工作，但是由于内容多、学科面广，难免出现个别疏漏之处，真诚欢迎广大士兵考生来电指出，以进一步改进。

作为全国最早、专业研究军考的教学团队，一直以来，被很多人关注、模仿甚至抄袭着，但是我们相信，只要真正投入精力教学和用心编写的教材，就会始终处于领先位置。始于“教学”、成于“教育”，军考教育需要这样的人；我们这个团队，正在一步一个脚印地朝着教育这个方向而继续努力！

崔爱功

说　明

为了便于战士们自学，本丛书为所有考点或知识点进行了系统编号，下面进行简要说明。

一、书中凡是属于知识点或考点的内容，均有灰色底纹（图片与表格除外）。

二、每个知识点或考点都对应一个编号（大学语文除外），一般采用“三级编号”形式，特殊情况下采用“四级编号”形式。例如，“2-5-6”为三级编号，含义是对应科目的《大专军考突破》中“第二章、第五节的第六个考点”。再如，“2-1-3-6”为四级编号，含义是对应科目的《大专军考突破》中“第二章、第一节、第三个考点下的第六个知识”。

三、为了便于战士们及时查找和弥补自己的知识漏洞，我们在多数题目的“点评”内容里，也加入了该题所涉及知识点或考点的编号。

北京崔爱功军考教育编辑部

军考复习指导

源自“北京崔爱功军考教育”多年来培训战士的成功方案总结

作者：崔爱功

一、军考备考，越早越好。

备考时间是参加部队考学的一个重要竞争力，不多阐述。

二、突破障碍，建立根基。

这是一个万事万物通用的哲理。战士们在学习过程中的最大障碍，就是不能搭建好完整的知识系统，所以才会衍生出种种难题。在身边无师的情况下，自通是困难的，所以战士们需要一种如同教师授课那样的好资料，“崔爱功军考教学团队”已经帮战士们解决了这个难题。

目前，比其他教材教辅在考点、例题、训练题等方面，讲解得更有效、更细致透彻、更明确考点、更利于自学的，就是《崔爱功军考突破》，这是每位战士必备的军考复习资料。

三、知错必改，改至必会。

首先，你要认识到只有建立了正确的学习方案，才会有效率可言；然后，你要落实到每次的学习过程中，才能加大成功的筹码。从一开始，就培养好习惯，这是我们在多年来进行一对一辅导战士的过程中不断验证的实用方法，希望大家不论用哪一本书学习，都要严格遵循下面的操作方法。

（1）任何学习的过程，都是在不断地“发现问题、解决问题、基于量变、促成质变”。

（2）准备一支黑笔，一支红笔，一支铅笔（橡皮），一个能每天装在衣袋的日常记录本，多个做题本与改错本。

①黑笔用来做题，以及标注已经会做、且无需进行第二遍的题。自己做过的每道题，必须留下痕迹。比如，对于例题，做完后如果正确，可以在题干上打个对勾；对于选择题、填空题，做完后如果正确，要写上答案；对于解答题，做完后如果正确，要留下过程或者打勾；等等。

②红笔用来标注错误，以及做记号。凡是自己学不懂的知识点，一律用红笔打问号（解决后，勾掉问号）；凡是第一次做错的题，一律用红笔改正（有需要时，写明出错原因）；凡是不会做的题，一律用红笔在题号上画个圈。

③铅笔用来作图，橡皮用来擦改，这是考试要求，且不伤原图。

④日常记录本用来把发现的问题及时记下，而后解决（解决后，勾掉）。在刻苦学习的整个过程中，必然伴随着大量的或大或小的问题，此时不记，过后则忘。

⑤做题本用来书写解题过程、默写背记内容。战士们参加的考试，都是考查反映在卷面上的功夫，所以必须勤动笔，学习往往是看无效、动笔有效。

⑥改错本用来改正那些自认为重要的错题，要写过程。运用改错本，日积月累，既能稳步提高能力，又利于归纳总结。

（3）所有标注的目的只有一个，就是让自己心知肚明。那些已经学会的，再做就是浪费时间；那些有错误、有疑问的，不尽快想办法解决就是隐患。在日后复习时，哪些不需再做、哪些需重做、甚至哪些需反复做，要做到一目了然。

其实，上面所说的也是一个人做事的规划问题。所以，有的人进步慢，有的人进步快。进步慢的人，重要因素就是反复做无用功，不得法则慢；进步快的人，重要因素就是一步一个脚印，得法则快。再次提醒大家，千万不要认为上面这些方式给学习带来了麻烦，这些才是正确有效的极佳方式，必将为你节省大量的宝贵时间！

四、明确方案，各科击破。

（1）理科的复习方案：

①首先要突破知识障碍，明确考查方向，为进行系统训练建立根基。我们出版发行的《崔爱功军考突破》，帮战士们解决了自学的难题。

②抓住那些考试原题，方法就是争取全做会。多年来，《军考教材》上面的某些题目，就是在给战士们送分，白送的分一定要拿到手；但要注意，真正的竞争差距不在那几道题上。我们编写的《军考教材详解》，帮战士们解决了教材答案过程不详尽的难题（提供免费下载）。

③系统训练，天道酬勤，能者居上。军考选拔的是那些能力拔尖的人才，那些人的能力是靠练出来的。我们出版发行的多种配套基础、模拟、真题详解汇编等针对性资料，帮战士们解决了材料不足的难题。

④熟记理科的所有公式，且要达到能够运用的水平。有些公式无需理解，背下来会用就可以；有些公式必须理解，不理解就不会用。

⑤复习数学、物理、化学等的具体方法，详见各科复习指导。

（2）文科的复习方案：

①突破知识障碍方面，与理科同。

②抓住考试原题方面，与理科同。

③系统训练方面，与理科同。

④学习文科的一个难题就是背记。在这个过程中，一方面要做好自我监督、自我检查；另一方面要下足功夫，看了不行你就读，读了不行你就写。总之，该背的就要背下来。

⑤复习语文、英语、政治、历史、地理、军政等的具体方法，详见各科复习指导。

五、无路可走，唯有努力！

非凡的成就，全靠最平凡的劳动酿成。参加军考，就不要心存侥幸、懒散安逸，更不要心存走关系、考场作弊等幻想，这些都会害了你；相反，你必须勤奋刻苦、不遗余力，就算咬破牙也要坚持下去，考试最终靠自己。

人生在世，勇敢一些，豁达一些，既要建立必胜的信心，又要具备不怕失败的勇气，这样的你，必将成功！

目　录

第一部分　数　学

第二部分　物　理

第三部分　化　学

第一部分

数学

第一章　函数与极限

<table>
<tr><td rowspan="12">知识提纲</td><td rowspan="5">第一节　函　数</td><td>01 知识点　函数概念</td></tr>
<tr><td>02 考点　函数的定义域</td></tr>
<tr><td>03 考点　函数的值域</td></tr>
<tr><td>04 知识点　函数的几种特性</td></tr>
<tr><td>05 考点　初等函数</td></tr>
<tr><td rowspan="5">第二节　极　限</td><td>06 考点　函数极限</td></tr>
<tr><td>07 知识点　函数极限的四则运算</td></tr>
<tr><td>08 知识点　无穷大和无穷小</td></tr>
<tr><td>9 考点　两个重要极限</td></tr>
<tr><td>10 考点　求函数极限的方法归类</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三节　函数的连续性</td><td>11 知识点　函数的连续性</td></tr>
<tr><td>12 考点　最值定理与介值定理</td></tr>
</table>

第一节　函　数

一、函数及相关概念

1-1-1　◆知识点　函数的定义：设 A、B 是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f: A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数．记作 $y=f(x)$，$x\in A$．

其中 x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 C（$C\subseteq B$）叫做函数的值域．

1．“$y=f(x)$”是函数符号，可以用任意的字母表示，如“$y=g(x)$”；

2．函数符号“$y=f(x)$”中的 $f(x)$ 表示与 x 对应的函数值，一个数，而不是 f 乘 x，f 表示对应法则，不同的函数其含义不一样；

3．构成函数的三要素：定义域、对应关系和值域；

4．函数的定义域通常由问题的实际背景确定，如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，则函数的定义域即是指能使这个式子有意义的实数的集合；

5．函数的定义域、值域要写成集合或区间的形式；

6．$y=f(x)$，$x\in A$ 是函数的完整表示形式．当使式子 $f(x)$ 有意义的实数 x 的集合恰好为 A 时，可以省略 $x\in A$，只写 $y=f(x)$ 就可以了；

7．函数的值域，即函数值的集合 $C=\{f(x)\,|\,x\in A\}\subseteq B$；

8．两个函数相同，当且仅当它们的定义域和对应关系完全一致，而与表示自变量和函数值的字母无关．即只有当函数的三要素完全相同时，两个函数才能称为同一函数．

9．$f(x)$ 不一定是解析式，有时可能是“列表”，“图象”的形式．

10．$f(x)$ 与 $f(a)$ 是不同的，前者为变数，后者为常数．

例 1　判断下列对应关系是否是函数：

（1）$y=x^2$（$x\in \mathbf{R}$），y 是 x 的函数吗？

（2）$y^2=x$（$x\geqslant 0$），y 是 x 的函数吗？

【解析】（1）是；（2）不是，因为 x 和 y 的对应是一对多的形式．

【点评】考查函数的概念，自变量 x 和函数 y 的对应形式可以是一对一，也可以是多对一，但不能是一对多．

1-1-2　◆知识点　函数的表示法:

表示函数的方法，常用的有解析法、列表法和图象法三种．

（1）解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式．

例如，$s=60t^2$（$t\in R$），　$S=25x^3-1(x\leqslant 1)$，$y=\sqrt{x-2}(x\geqslant 2)$ 等等都是用解析式表示函数关系的．

优点：一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值.中学阶段研究的函数主要是用解析法表示的函数.

例如，某种笔记本每个 5 元，买 $x \in \{1，2，3，4\}$个笔记本的钱数记为 y（元），试用解析法表示 x 为自变量的函数 y 的解析表达式.

解：这个函数的定义域集合是{1，2，3，4}，函数的解析式为

$y = 5x$，$x \in \{1，2，3，4\}$

（2）列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系.

例如，学生的身高　　　　　　　　　　　　单位：厘米

学号 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
身高 y	125	135	140	156	138	172	167	158	169

数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表，银行里的利息表，列车时刻表等等都是用列表法来表示函数关系的.公共汽车上的票价表

优点：不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值.

例如，某种笔记本每个 5 元，买 $x \in \{1，2，3，4\}$个笔记本的钱数记为 y（元），试用列表法表示 x 为自变量的函数 y 的对应关系.

单位：元

x	1	2	3	4
y	5	10	15	20

（3）图象法：就是用函数图象表示两个变量之间的关系.

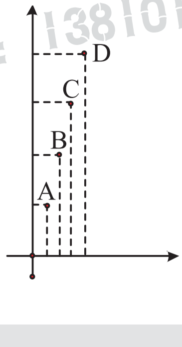
例如，气象台应用自动记录器描绘温度随时间变化的曲线，我国人口出生率变化的曲线，工厂的生产图象，股市走向图等都是用图象法表示函数关系的.

优点：能直观形象地表示出自变量的变化，相应的函数值变化的趋势，这样使得我们可以通过图象来研究函数的某些性质.

例如，某种笔记本每个 5 元，买 $x \in \{1，2，3，4\}$ 个笔记本的钱数记为 y（元），试用图象法表示 x 为自变量的函数 y 的对应关系.

解：这个函数的定义域集合是{1，2，3，4}，

它的图象由 4 个孤立点 A（1，5），B（2，10），C（3，15），D（4，20）组成，如图所示



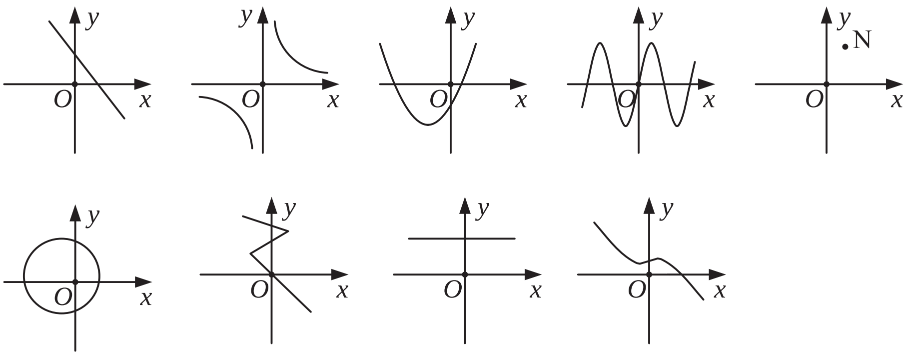
1-1-3　◆知识点　函数的图象定义：

对于函数 $y = f(x)$，在直角坐标系中，如果将自变量 的取值视为某一点的横坐标，把对应

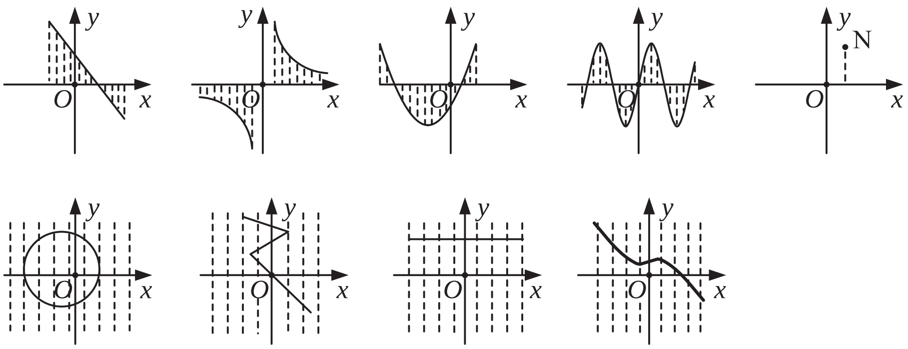
的唯一的函数值 视为此点的纵坐标，那么这些点 在平面上组成的图形就是此函数的图象，简称函数 $y=f(x)$ 的图象. 即 $\{(x, y) \mid y=f(x), x \in A\}$.

一般来说，把一个任意的二维图形放在直角坐标系里面，然后任意作一条与 x 轴垂直的直线，如果这条直线与该图形最多只有一个交点（当然某些位置可以没有交点，但至少存在一条直线与图象有交点），那么，这个图形一定是对应某个函数的图形.

例 2 判断下列图象是否对应着一个函数？



【详解】（1）（2）（3）（4）（5）（8）（9）是；（6）（7）否.

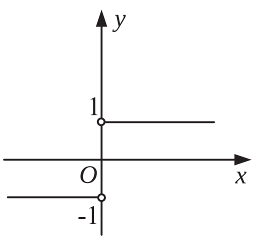


【点评】 考察函数的图象定义.

例 3 画出函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 的图象.

【详解】 先化简，转化成熟悉的形式（$x \neq 0$）.

当 $x>0$ 时， $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{x}=1$；当 $x<0$ 时， $f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{-x}=-1$. 则图象如下



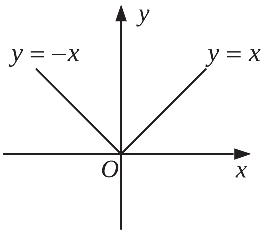
【点评】 考查函数图象的画法，注意定义域.

例 4 画出下列函数图象的草图：（1） $y=\sqrt{x^2}$；（2） $y=(\sqrt{x})^2$；（3） $y=\dfrac{x^2}{x}$.

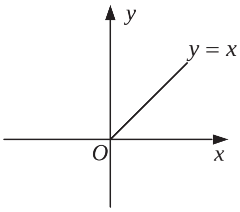
【详解】

（1） $y=\sqrt{x^2}=|x|$

当 $x\geqslant 0$ 时， $y=x$；当 $x<0$ 时， $y=-x$. 图象如下

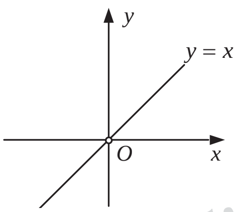


（2）首先确定 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x\in[0，+\infty)$，则函数可化简为 $y=x$，$x\in[0，+\infty)$. 图象如下



（3）首先确定 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$，则

当 $x>0$ 时， $y=\dfrac{x\cdot x}{x}=x$；当 $x<0$ 时， $y=\dfrac{x\cdot x}{x}=x$. 图象如下



【点评】这类题，需要先化简成熟悉的函数形式，才能画出对应图象.

1-1-4　◆知识点　分段函数：一个函数，对于不同范围的 x，对应法则也不同，就称为分段函数.

分段函数的解析式是分别写出函数值几种不同的表达式并用一个左大括号括起来，然后，在各式的后面分别注明各部分的自变量的取值情况.

函数图象可以是一些点或线段构成，分段函数的图象是由若干个点或若干段曲线组合而成.

例 5　已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ 1 & (x=0) \\ x+1 & (x>0) \end{cases}$，求 $f(1)$；$f(-1)$；$f(0)$；$f\{f[f(-1)]\}$.

【详解】$f(1)=1+1=2$；$f(-1)=(-1)^2=1$；$f(0)=1$；$f\{f[f(-1)]\}=3$.

【点评】$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x<0)\\ 1 & (x=0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$ 的意义是当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2$；当 $x=0$ 时，$f(x)=1$；当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1$.

1-1-5 ◆考点 函数的定义域

1．求函数定义域的基本思路和方法

用解析式表示函数时，我们约定：如果不单独指出函数的定义域是什么集合，那么函数的定义域就是能使这个式子有意义的所有实数 x 的集合.

有这个约定，我们在用解析式给出函数的对应法则的同时也就给定了定义域，而求函数的定义域就是在这个意义之下写出使式子有意义的所有实数组成的集合.

2．求用解析式 $y=f(x)$ 表示的函数的定义域时，常有以下几种情况：

（1）若 $f(x)$ 是整式，则函数的定义域是实数集 $\mathbf{R}$；

（2）若 $f(x)$ 是分式，则函数的定义域是使分母不等于 0 的实数集；

（3）若 $f(x)$ 是二次根式，则函数的定义域是使根号内的式子大于或等于 0 的实数集合；

（4）若 $f(x)$ 是由几个部分的数学式子构成的，则函数的定义域是使各部分式子都有意义的实数集合，通过不等式组求出；

（5）若 $f(x)$ 是由实际问题抽象出来的函数，则函数的定义域应符合实际问题.

求函数定义域是通过解关于自变量的不等式（组）来实现的. 函数定义域是研究函数性质的基础和前提. 函数对应法则通常表现为表格，解析式和图象.

3．求定义域步骤： 根据函数式列不等式（组）→解不等式（组）→得到定义域.

例 6（1）（2012 大专士兵真题）函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域为________.

【解析】由 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$ 得，$x\in(-\infty,0)\cup(0,3]$. 故填：$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

（2）（2013 大专士兵真题）函数 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域为________.

【解析】由 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 得 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即 $x^2-5x+4\leqslant 0$，解得 $x\in[1,4]$. 故填：$[1,4]$.

【点评】首先被开平方数必须大于等于 0，得 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$，再有对数的性质知道真数必须大于等于 1，也就是 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，转化为一元二次不等式 $x^2-5x+4\leqslant 0$，这个一元二次不等式的解集 $[1,4]$ 就是所求函数的定义域.

例 7 求函数 $f(x)=\dfrac{1g(x^2-2x)}{\sqrt{9-x^2}}$ 的定义域.

【详解】要使函数有意义，必须且只需：$\begin{cases} x^2-2x>0 \\ 9-x^2>0 \end{cases}$

解得 $-3<x<0$ 或 $2<x<3$，故函数的定义域是 $(-3，0)\cup(2，3)$.

【点评】考虑三个方面：真数必须大于 0，被开平方数必须大于等于 0，分母不能为 0.

例 8　已知函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[-1，1]$，求 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

【详解】$\because$ $y=f(2^x)$ 的定义域是 $[-1，1]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，则 $y=f(x)$ 的定义域是 $[\dfrac{1}{2}，2]$.

$\therefore$ 函数 $y=f(\log_2 x)$ 中 $\dfrac{1}{2}\leqslant \log_2 x\leqslant 2$，变形为 $\log_2\sqrt{2}\leqslant \log_2 x\leqslant \log_2 4$，得 $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4$.

故函数 $f(\log_2 x)$ 的定义域为 $[\sqrt{2}，4]$.

【点评】根据函数 $f(2^x)$ 定义域的意义得到 2^x 的范围，就是函数 $f(x)$ 的定义域，再根据函数 $f(x)$ 的定义域得到一个不等式 $\dfrac{1}{2}\leqslant \log_2 x\leqslant 2$，这个不等式的解集，就是函数 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

例 9　（1）（2014 大专士兵真题）函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域是_________.

A．$\{x\mid x\geqslant 3\}$　　　　B．$\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$

C．$\{x\mid x\leqslant -2\}$　　　　D．$\{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2\}\cup\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 4\}$

【解析】$\because \begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0 \\ -1\leqslant \dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2 \\ -3\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$，$\therefore \{x\mid -3\leqslant x\leqslant -2\}\cup\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 4\}$. 故选 D.

【点评】求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域必须 $\sqrt{x^2-x-6}$ 与 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 同时有意义.

(2)(2017 大专士兵真题)若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2，2]$，则 $f(\log_2 x)$ 的定义域是(　　)

A．$[-\dfrac{1}{4}，0)\cup(0，4]$　　　　B．$[\dfrac{1}{4}，4]$

C．$[-\dfrac{1}{2}，0)\cup(0，2]$　　　　D．$[\dfrac{1}{2}，2]$

【详解】由 $-2\leqslant \log_2 x\leqslant 2$ 可得，$\log_2\dfrac{1}{4}\leqslant \log_2 x\leqslant \log_2 4$，所以 $\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 4$．故选 B.

【点评】函数 $f(\log_2 x)$ 中的 $\log_2 x$ 与函数 $f(x)$ 中的 x 的地位等价，由于函数 $f(x)$ 中的 x 的取值范围是 $[-2，2]$，则函数 $f(\log_2 x)$ 中的 $\log_2 x$ 的取值范围也是 $[-2，2]$.

1-1-6　◆考点　函数的值域

1．函数的值域类型： 函数的值域是由其对应法则和定义域共同决定的．其类型依解析式的特点分可分三类：

（1）求常见函数值域；
（2）求由常见函数复合而成的函数的值域；
（3）求由常见函数作某些“运算”而得函数的值域.

2．求函数值域的各种方法：

（1）直接法：利用常见函数的值域来求

一次函数 $y=ax+b$（$a\neq 0$）的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$；

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq 0$）的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，值域为 $\{y\mid y\neq 0\}$；

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的定义域为 $\mathbf{R}$，

当 $a>0$ 时，值域为 $\{y\mid y\geqslant \dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$；

当 $a<0$ 时，值域为 $\{y\mid y\leqslant \dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$.

（2）配方法：转化为二次函数，利用二次函数的特征来求值；常转化为形如：

$f(x)=ax^2+bx+c$，$x\in(m，n)$ 的形式；

（3）分式转化法（或改为“分离常数法”）
（4）换元法：通过变量代换转化为能求值域的函数，化归思想；
（5）三角有界法：转化为只含正弦、余弦的函数，运用三角函数有界性来求值域；
（6）基本不等式法：转化成形如：$y=x+\dfrac{k}{x}$（$k>0$），利用平均值不等式公式来求值域；
（7）单调性法：函数为单调函数，可根据函数的单调性求值域.
（8）数形结合：根据函数的几何图形，利用数形结合的方法来求值域.
（9）逆求法（反求法）：通过反解，用 y 来表示 x，再由 x 的取值范围，通过解不等式，得出 y 的取值范围；常用来解，形如：$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，$x\in(m，n)$

例 10　求下列函数的值域：

① $y=3x^2-x+2$；　② $y=\sqrt{-x^2-6x-5}$；

③ $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$；　④ $y=x+4\sqrt{1-x}$；

⑤ $y=x+\sqrt{1-x^2}$；　⑥ $y=|x-1|+|x+4|$；

⑦ $y=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$；　⑧ $y=\dfrac{1-\sin x}{2-\cos x}$；

⑨ $y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x-1}$（$x>\dfrac{1}{2}$）

【详解】

①（配方法）

$\because\ y=3x^2-x+2=3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{23}{12}\geq\frac{23}{12}$，$\therefore\ y=3x^2-x+2$ 的值域为$[\frac{23}{12}，+\infty)$.

②求复合函数的值域：

设 $\mu=-x^2-6x-5$（$\mu\geqslant 0$），则原函数可化为 $y=\sqrt{\mu}$.

又$\because\ \mu=-x^2-6x-5=-(x+3)^2+4\leqslant 4$，$\therefore\ 0\leqslant\mu\leqslant 4$，故 $\sqrt{\mu}\in[0，2]$，

$\therefore\ y=\sqrt{-x^2-6x-5}$ 的值域为$[0，2]$.

③（法一）反函数法：

$y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的反函数为 $y=\frac{2x+1}{x-3}$，其定义域为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq 3\}$，

$\therefore$原函数 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的值域为 $\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 3\}$.

（法二）分离变量法：

$y=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\frac{7}{x-2}$，$\because\ \frac{7}{x-2}\neq 0$，$\therefore\ 3+\frac{7}{x-2}\neq 3$，

$\therefore$函数 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的值域为 $\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 3\}$.

④换元法（代数换元法）：

设 $t=\sqrt{1-x}\geqslant 0$，则 $x=1-t^2$，$\therefore$原函数可化为 $y=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5(t\geqslant 0)$，

$\therefore\ y\leqslant 5$，$\therefore$原函数值域为$(-\infty，5]$.

⑤三角换元法：

$\because\ 1-x^2\geq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 1$，$\therefore$设 $x=\cos\alpha$，$\alpha\in[0，\pi]$，则 $y=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$

$\because\ \alpha\in[0，\pi]$，$\therefore\ \alpha+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4}，\frac{5\pi}{4}]$，$\therefore\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}，1]$，$\therefore\ \sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\in[-1，\sqrt{2}]$，

$\therefore$原函数的值域为$[-1，\sqrt{2}]$.

⑥数形结合法：

$$y=|x-1|+|x+4|=\begin{cases}-2x-3 & (x\leqslant -4)\\ 5 & (-4<x<1)\\ 2x+3 & (x\geqslant 1)\end{cases}，\therefore\ y\geqslant 5，$$

$\therefore$函数值域为$[5，+\infty)$.

⑦判别式法：

$\because\ x^2+x+1>0$ 恒成立，$\therefore$函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

由 $y=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$ 得：$(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$

当 $y-2=0$ 即 $y=2$ 时，即 $3x+0=0$，$\therefore x=0\in\mathbf{R}$

当 $y-2\neq 0$ 即 $y\neq 2$ 时，$\because x\in\mathbf{R}$ 时方程 $(y-2)x^2+(y+1)x+y-2=0$ 恒有实根，

$\therefore \Delta=(y+1)^2-4\times(y-2)^2\geqslant 0$，$\therefore 1\leqslant y\leqslant 5$ 且 $y\neq 2$，$\therefore$原函数的值域为 $[1,5]$．

⑧方程法：

原函数可化为：$\sin x-y\cos x=1-2y$，

$\therefore \sqrt{1+y^2}\sin(x-\varphi)=1-2y$（其中 $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$），

$\therefore \sin(x-\varphi)=\dfrac{1-2y}{\sqrt{1+y^2}}\in[-1,1]$，$\therefore |1-2y|\leqslant\sqrt{1+y^2}$，$\therefore 3y^2-4y\leqslant 0$，$\therefore 0\leqslant y\leqslant\dfrac{4}{3}$，

$\therefore$原函数的值域为 $[0,\dfrac{4}{3}]$．

⑨基本不等式（双钩函数）法：

$$y=\frac{2x^2-x+1}{2x-1}=\frac{x(2x-1)+1}{2x-1}=x+\frac{1}{2x-1}=x-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2},$$

$\because x>\dfrac{1}{2}$，$\therefore x-\dfrac{1}{2}>0$，$\therefore x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\geqslant 2\sqrt{(x-\frac{1}{2})\dfrac{\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})}}=\sqrt{2}$，

当且仅当 $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$ 时，即 $x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

$\therefore y\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$，$\therefore$原函数的值域为 $[\sqrt{2}+\dfrac{1}{2},+\infty)$．

二、函数的几种特性

1-1-7 ◆知识点 奇偶函数的图象特征

（1）奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

（2）若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，$f(x+a)=f(-x-a)$；若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x+a)$．

（3）多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的偶次项（即奇数项）的系数全为零.

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $P(x)$ 的奇次项（即偶数项）的系数全为零.

例 1（2016 大专士兵真题）函数 $y=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}$ 是（　　）

A．偶函数　　　　B．奇函数

C．非奇非偶函数　　　　D．既奇又偶函数

【详解】 因为 $f(-x)=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{1+(-x)^2}-(-x))}=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)}=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)^{-1}}$

$$=-\frac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}=-f(x)$$

所以函数 $y=\dfrac{1}{\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}$ 是奇函数，故选 B.

1-1-8　◆知识点　函数的单调性

（1）设 $x_1 \cdot x_2 \in [a,b]$，$x_1 \neq x_2$ 那么

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数；

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数.

（2）设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数.

（3）如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数，则在公共定义域内，和函数 $f(x)+g(x)$ 也是减函数；如果函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是增函数.

例 1（2018 大专士兵真题）函数 $f(x)=2x^2+e^{x^2}(-1\leqslant x\leqslant 2)$ 是（　　）

A．偶函数　　B．奇函数　　C．单调增函数　　D．非单调函数

【详解】 函数 $f(x)=2x^2+e^{x^2}(-1\leqslant x\leqslant 2)$ 的定义域不关于原点对称，因此不具有奇偶性；$f'(x)=4x+2xe^{x^2}(-1\leqslant x\leqslant 2)$ 在定义域内符号不确定，因此不具有单调性. 故选 D.

1-1-9　◆知识点　周期函数的定义： 对于 $f(x)$ 定义域内的每一个 x，都存在非零常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有周期性，T 叫做 $f(x)$ 的一个周期，则 kT（$k\in N^*$）也是 $f(x)$ 的周期，所有周期中的最小正数叫 $f(x)$ 的最小正周期.

1．正弦型函数 $A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 的最小正周期： $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$

2．几种常见的特殊抽象函数：

函数 $y=f(x)$ 满足对定义域内任一实数 x（其中 a 为常数），有

（1）$f(x)=f(x+a)$，则 $y=f(x)$ 是以 $T=a$ 为周期的周期函数；

（2）$f(x+a)=f(x-a)$，则 $f(x)$ 是以 $T=2a$ 为周期的周期函数.

（3）若 $f(x)=-f(x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数.

1-1-10　◆知识点　函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性

（1）函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$.

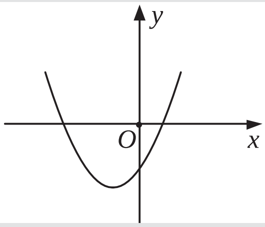
（2）对于函数 $y=f(x)$ （ $x\in R$ ）， $f(x+a)=f(b-x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x=\dfrac{a+b}{2}$；函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$

$\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

（3）若 $f(x)=-f(-x+a)$ 即 $f(x)+f(-x+a)=0$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{a}{2}，0)$ 对称；若 $f(x)=b-f(-x+a)$ 即 $f(x)+f(-x+a)=b$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{a}{2}，\dfrac{b}{2})$ 对称；

1-1-11 ◆考点 函数的图象变换

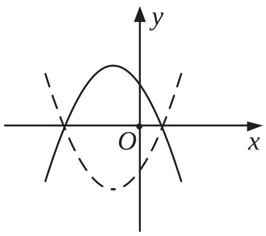
我们以二次函数 $y=x^2+2x-3$ 为例，来介绍对称变换、平移变换与伸缩变换.



1．关于 x 轴对称翻折

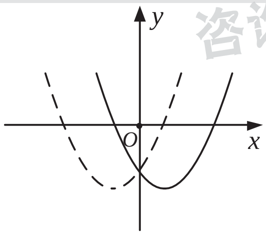
解析式变化：由 $y=x^2+2x-3$ 变为 $-y=x^2+2x-3$，即 $y=-x^2-2x+3$.

图象变化：（下图中，虚线为原来图象，实线为变后图象．后面的类似.）



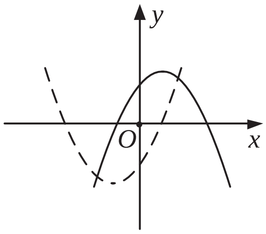
2．关于 y 轴对称翻折

解析式变化：由 $y=x^2+2x-3$ 变为 $y=(-x)^2+2(-x)-3$，即 $y=x^2-2x-3$.



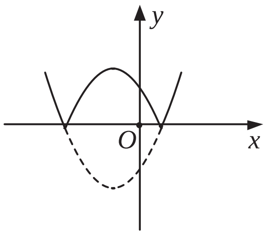
3．关于原点对称翻折

解析式变化：由 $y=x^2+2x-3$ 变为 $-y=(-x)^2+2(-x)-3$，即 $y=-x^2+2x+3$.



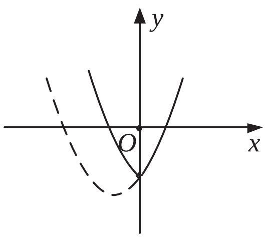
4．关于 x 轴去下翻上

解析式变化：由 $y=x^2+2x-3$ 变为 $y=|x^2+2x-3|$．



5．关于 y 轴去左翻右：

解析式变化：由 $y=x^2+2x-3$ 变为 $y=|x|^2+2|x|-3$．



6．平移变换

（1）对于左右平移时，解析式的变化为“左加右减”.

具体方法：（注意平移前先化成 $y=f(x)$ 的形式）

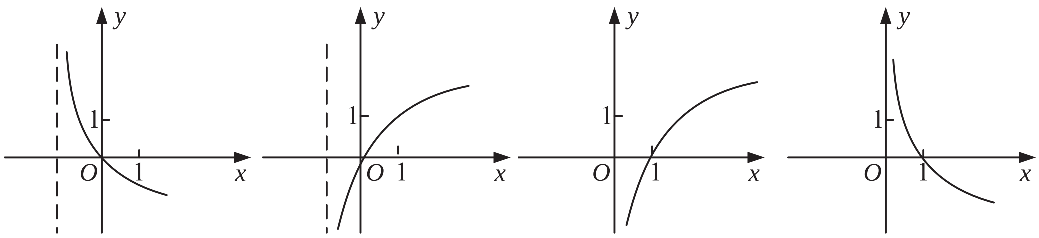
把 $y=f(x)$ 左移 a 个单位时，把解析式中“右边的”x 全部替换成 $(x+a)$，得 $y=f(x+a)$；

把 $y=f(x)$ 右移 a 个单位时，把解析式中“右边的”x 全部替换成 $(x-a)$，得 $y=f(x-a)$．

例如　**（1）**把 $y=x^2+2x-3$ 左移 5 个单位，得 $y=(x+5)^2+2(x+5)-3$．

（2）把 $y=2\sin(3x+\frac{\pi}{6})$ 右移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得 $y=2\sin(3x+\frac{\pi}{6})=2\sin[3(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{6}]$．

例 1　函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象大致是（　　）



A　　　B　　　C　　　D

【详解】 $y=\log_2(x+1)$ 的图象可由 $y=\log_2 x$ 向左平移一个单位得到．故选 B．

【点评】考查函数的图象变换．

（2）对于上下平移时，解析式的变化为“上加下减”．

具体方法是：（注意平移前先化成 $y=f(x)$ 的形式）

①把 $y=f(x)$ 上移 a 个单位时，在函数解析式中 y 的异侧 $+a$ ，即变为 $y=f(x)+a$ ；

②把 $y=f(x)$ 下移 a 个单位时，即在函数解析式中 y 的异侧 $-a$ ，即变为 $y=f(x)-a$ ．

例如　把 $y=x^2+2x-3$ 下移 5 个单位，得 $y=x^2+2x-3-5$ ．

7．伸缩变换

①由 $y=f(x)$ 变为 $y=f(mx)(m>0)$ ：图象可将 $y=f(x)$ 图象上各点的纵坐标不变，横坐标缩小到原来的 $\dfrac{1}{m}$ 倍得到（如果 $0<m<1$ ，实际上是将 $f(x)$ 的图象横向伸展）．

②由 $y=f(x)$ 变为 $y=mf(x)(m>0)$ ：图象可将 $y=f(x)$ 图象上各点的横坐标不变，纵坐标扩大到原来的 m 倍得到（如果 $0<m<1$ ，实际上是将 $f(x)$ 的图象纵向压缩）．

例如　（1）函数 $y=x^2+2x-3 \xrightarrow{\text{横坐标缩小为原来的}\frac{1}{2}} y=(2x)^2+2\cdot(2x)-3$ ．

（2）函数 $y=x^2+2x-3 \xrightarrow{\text{纵坐标伸长为原来的2倍}} y=2(x^2+2x-3)$ ．

1-1-12　◆知识点　两个函数图象的对称性

（1）函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ （即 y 轴）对称．

（2）两个函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称；函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2m}$ 对称．

（3）函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．

1-1-13　◆知识点　反函数

1．反函数的定义：函数 $y=f(x)$（$x\in A$）中,设它的值域为 C，从式子 $y=f(x)$ 中，用 y 把 x 表示出来，即 $x=g(y)$．如果对于 y 在 C 中的任意一个值，通过 $x=g(y)$，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么 $x=g(y)$ 就表示 y 是自变量，x 是因变量的函数．这样的函数 $x=g(y)$（$y\in C$）就叫做函数 $y=f(x)$（$x\in A$）的反函数．记作：$x=f^{-1}(y)$，习惯上写成 $y=f^{-1}(x)$．

2．反函数的性质：

（1）反函数存在的条件：

从定义域到值域上的一一映射确定的函数才有反函数（加强条件：单调函数必有反函数；偶函数、周期函数不存在反函数；奇函数有的有反函数，有的没有反函数）．

（2）原函数与反函数的单调性之间的关系：互为反函数的两个函数具有相同的单调性．

（3）原函数与反函数的图象之间的关系：互为反函数的两个函数图象关于 $y=x$ 对称．

（4）原函数与反函数的定义域与值域之间的关系：

反函数的定义域、值域上分别是原函数的值域、定义域．

（5）原函数与反函数的对应法则：互逆 $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

若点 $(a，b)$ 在原函数 $y=f(x)$ 的图象上，则点 $(b，a)$ 必在其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上．

例 2　设函数 $f(x)=\log_a(x+b)$（$a>0$，$a\neq 1$）的图象过点 $(0，0)$，其反函数的图象过点 $(1，2)$，则 $a+b$ 等于（　　）

A．6　　B．5　　C．4　　D．3

【详解】由反函数的图象过点 $(1，2)$，则知原函数的图象过点 $(2，1)$，得 $\begin{cases}\log_a b=0\\ \log_a(2+b)=1\end{cases}$，则 $b=1$，$a=3$，得 $a+b=4$．故选 C．

【点评】考查原函数和反函数图象关于 $y=x$ 对称,即原函数过点 $(a，b)$，则反函数过 $(b，a)$．

例 3　记 $f(x)=\log_3(x+1)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则方程 $f^{-1}(x)=8$ 的解 $x=$_______．

【详解】 $f^{-1}(x)=8\Leftrightarrow f(8)=x$，所以 $x=\log_3(8+1)=2$．故填 2．

【点评】考查反函数的求法：$f^{-1}(x)=8\Leftrightarrow f(8)=x$．

例 4　已知 $f(x)=x^3-a$ 且 $f(-1)=0$，则 $f^{-1}(1)=$_______．

【详解】由 $f(-1)=0$，得 $(-1)^3-a=0$，即 $a=-1$，$\therefore f(x)=x^3+1$，

设 $f^{-1}(1)=k$，则 $f(k)=1$，即 $k^3+1=1\Rightarrow k=0$，$\therefore f^{-1}(1)=0$．

【点评】考查原函数与其反函数的互逆性质．即 $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$．

例 5　若函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=1+x^2$（$x<0$），则 $f(2)$ 的值为（　　）

A．1　　B．-1　　C．1 或 -1　　D．5

【详解】令 $f(2)=t$，则 $f^{-1}(t)=2\Leftrightarrow 1+t^2=2\Leftrightarrow t=\pm 1$，而 $t<0$，得 $t=-1$．故选 B．

【点评】注意等价变形 $f(2)=t\Leftrightarrow f^{-1}(t)=2$．

例 6 设$a>0$，$a\neq 1$，函数$y=\log_a x$的反函数与$y=\log_a \dfrac{1}{x}$的反函数的图象关于（　　）

A．x轴对称　　B．y轴对称　　C．$y=x$轴对称　　D．原点对称

【详解】函数$y=\log_a x$的反函数为$y=a^x$，$y=\log_a \dfrac{1}{x}$即$y=-\log_a x$的反函数为$y=a^{-x}$，∴图象关于y轴对称．故选 B．

【点评】考查反函数的求法．

3．求反函数的步骤：

第一步：反解出$x=f^{-1}(y)$；

第二步：x、y互换；

第三步：写出$y=f^{-1}(x)$的定义域，即$f(x)$的值域．

例 7 求$f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数．

【详解】第一步：反解．

$$y=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})\Rightarrow 2^y-x=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow(2^y-x)^2=x^2+1\Rightarrow 2^{2y}-1=2x\cdot 2^y$$

$$\Rightarrow x=\frac{2^{2y}-1}{2\cdot 2^y}=\frac{1}{2}(2^y-2^{-y}).$$

第二步：x、y互换，改写为$y=\dfrac{1}{2}(2^x-2^{-x})$，即$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(2^x-2^{-x})$．

第三步：求反函数的定义域，即原函数值域．

$\because 0<x+\sqrt{x^2+1}<+\infty$，$\therefore \log_2(x+\sqrt{x^2+1})\in\mathbf{R}$．

所以，$f(x)$的反函数为$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(2^x-2^{-x})$，$x\in\mathbf{R}$．

例 8 函数$y=2^{1-x}+3$（$x\in\mathbf{R}$）的反函数的解析表达式为________．

【详解】$y=2^{1-x}+3\Rightarrow 2^{1-x}=y-3\Rightarrow 1-x=\log_2(y-3)\Rightarrow x=1-\log_2(y-3)$，

∴反函数解析式为$y=1-\log_2(x-3)$

【点评】考查指数形式的反函数的求法．

例 9 函数$y=\dfrac{x-2}{2x-1}(x\neq\dfrac{1}{2})$的反函数是（　　）

A．$y=\dfrac{2x-1}{x+2}(x\neq -2)$　　B．$y=\dfrac{x-2}{2x-1}(x\neq\dfrac{1}{2})$

C．$y=\dfrac{x+1}{2x-1}(x\neq\dfrac{1}{2})$　　D．$y=\dfrac{2x-1}{x-2}(x\neq 2)$

【详解】由 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}$，得 $x=\dfrac{y-2}{2y-1}(y\neq\dfrac{1}{2})$，即反函数为 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}(x\neq\dfrac{1}{2})$．故选 B.

【点评】考查了求反函数的步骤：反解、改写、求定义域.

例 10　函数 $y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x<0)$ 的反函数为（　　）

A．$y=-\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x<1)$　　B．$y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x<1)$

C．$y=-\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x<0)$　　D．$y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x<0)$

【详解】$y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x<0)\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-y^2$，

$\because -1\leqslant x<0$，$\therefore x=-\sqrt{1-y^2}$，写成标准反函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$，淘汰 B、D.

又原函数值域 $0\leqslant y<1$，所以反函数定义域 $0\leqslant x<1$．故选 A.

【点评】考查了求反函数的步骤：反解、改写、求定义域.

三、初等函数

1-1-14　◆知识点　基本初等函数：常数函数 $y=c$、幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）、指数函数 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$、三角函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，$y=\sin x$，$y=\cos x$，和反三角函数 $y=arc\sin x$，$y=arc\cos x$，$y=arc\tan x$，$y=arc\cot x$ 这六类函数统称为**基本初等函数**．很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数.

1-1-15　◆知识点　复合函数：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$.

1-1-16　◆知识点　初等函数：由基本初等函数，经过有限次四则运算和有限次复合而成的，并且能用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如：$y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，$y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

例 1　已知 $y=\ln u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数.

【详解】$y=\ln u=\ln x^2$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

【点评】注意复合之后 x 的范围的变化.

例 2 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

【详解】 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\dfrac{x}{2}$.

【点评】 复合函数的中间变量可以不限于一个.

例 3 函数 $y=x^x$ 是由哪些简单函数复合而成的？

【详解】 $y=x^x \Leftrightarrow y=e^{x\ln x}$，则 $y=x^x$ 由 $y=e^u$，$u=x\ln x$ 复合而成.

【点评】 掌握这种分解方法对以后的函数求导是必要的.

例 4 函数 $y=|x|$ 是由哪些简单函数复合而成的？

【详解】 $y=|x| \Leftrightarrow y=\sqrt{x^2}$，则 $y=|x|$ 由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成.

【点评】 由此可见 $y=|x|$ 是初等函数.

例 5 （2012 大专士兵真题）函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域为________.

【详解】 由 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$ 得，$x\in(-\infty，0)\cup(0，3]$.

【点评】 函数复合或四则运算后尤其要注意定义域的变化.

学习复合函数有两方面要求： 一方面，会把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；另一方面，会把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

第二节　极　限

一、函数极限

1-2-1　◆知识点　自变量 x 的变化过程：

x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（记作 $x\to\infty$）；

x 无限接近于某一值 x_0，或者说 x 趋向于 x_0（记作 $x\to x_0$）.

1-2-2　◆知识点　当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

$x\to\infty$ 包含以下两种情况：

x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$；

x 取负值，它的绝对值无限增大（即 x 无限减小），记作 $x\to-\infty$.

若 x 不指定正负，只是 $|x|$ 无限增大，则写成 $x\to\infty$.

如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

类似地，如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时存在极限 A，称数 A 为当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限.

记作　$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$）

“无穷极限”（$x\to\infty$）的几种类型：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$.　　例如：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$.

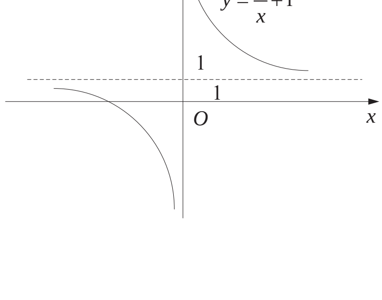
（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$.　　例如：$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$.

（3）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$，则可写成 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

例如：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$.

例 1　讨论函数 $y=\frac{3}{x}+1$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时的变化趋势.

【详解】



作出函数 $y=\dfrac{3}{x}+1$ 的图象.

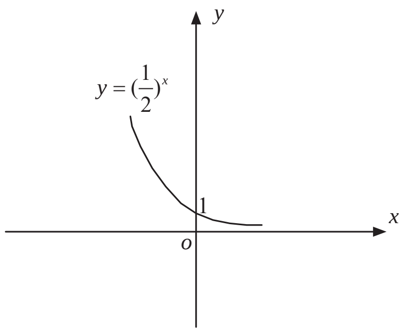
当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，$y=\dfrac{3}{x}+1\to1$，因此当 $x\to\infty$ 时，$y=\dfrac{3}{x}+1\to1$.

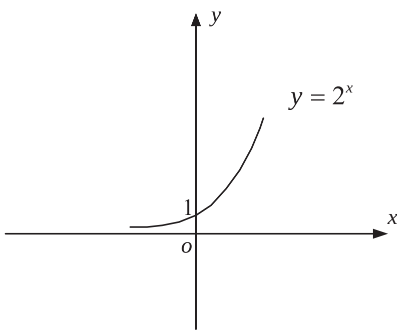
【点评】变化趋势就是看图象的走向.

例 2 作出函数 $y=(\dfrac{1}{2})^x$ 和 $y=2^x$ 的图象，并判断下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{2})^x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$.

【详解】





（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{2})^x=0$；

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

【点评】极限就是变化趋势走向无限接近的确定值.

例 3 （1）讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限：

① $y=1+\dfrac{1}{x^2}$；　② $y=2^x$.

【详解】（1）①当 $x\to+\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x^2}\to1$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x^2}\to1$.

因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=1+\dfrac{1}{x^2}$ 无限地接近于常数 1，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x^2})=1$.

②当 $x\to+\infty$ 时，$y=2^x\to+\infty$；

当 $x\to-\infty$ 时，$y=2^x\to0$.

因此，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=2^x$ 不可能无限地趋近某一个常数，即 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在.

结论：当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在并且相等为 A 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在为 A，

即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\quad\Leftrightarrow\quad\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

（2）（2018 大专士兵真题）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=$（　　）

A．1　　B．0　　C．∞　　D．不存在

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=\sin(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x})=\sin 0=0$.故选 B.

【点评】 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限就是图象向左和向右的走向同时无限接近的同一个确定值.

1-2-3　◆知识点　当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to x_0$ 包含以下两种情况：

$x\to x_0^{+}$ 表示 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0；

$x\to x_0^{-}$ 表示 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0 .

记号 $x\to x_0$ 表示 x 无限趋近于 x_0，对从哪个方向趋近没有限制.

如果 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0（即 $x\to x_0^{+}$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 在 x_0 处存在右极限 A，称数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}}f(x)=A$；

如果 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0（即 $x\to x_0^{-}$）时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么就称 $f(x)$ 在 x_0 处存在左极限，称数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^{-}}f(x)=A$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^{-}}f(x)=A$ 时，那么就称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 存在极限；数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

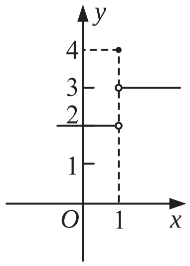
例如　（1）$f(x)=\begin{cases}2\sin\dfrac{\pi(x+1)}{6} & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ \cos\pi x & (x<0)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to0^{-}}\cos\pi x=\cos 0=1$，　$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to0^{+}}2\sin\dfrac{\pi(x+1)}{6}=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，

$\lim\limits_{x\to0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=1$，从而有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

注意：左极限与右极限不一定同时存在，也不一定相等.

例如 （2）$f(x)=\begin{cases}2,(x<1)\\4,(x=1)\\3,(x>1)\end{cases}$，其图象如下．可见，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=3$，而$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在．



例 4 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\x^3, & x\geqslant0\end{cases}$，讨论当 $x\to0$ 时的极限．

【详解】 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^3=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$．

因而当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在．

一般地，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$．

例 5 已知 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant2\\2, & x<2\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to2}f(x)$．

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}x=2$，$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}2=2$，

即 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$．

【点评】 对于分段函数的分界点，一般分别求左右极限．

例 6 已知= $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在？

【详解】 当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$，所以函数可以分段表示为 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\-1, & x<0,\end{cases}$

于是 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在．

【点评】 只有当左右极限都存在且相等时，极限才存在．

例 7 求下列极限：

（1）$f(x)=x$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；（2）$f(x)=c$，求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，（$c$ 为常数）．

【详解】（1）因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)=x$ 的值无限趋近于 x_0，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$．

（2）因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 c，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}c=c$．

【点评】 常数的极限是其本身．

1-2-4　◆考点　函数极限的四则运算法则：

（1）设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=b$，则有

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=a+b$，　　$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=a-b$，

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$，　　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，则有

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=a\cdot b$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$（$b\neq 0$）.

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$（$C$ 为常数）.

（5）$\lim\limits_{x\to x_0}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=ca$（$c$ 为常数）.

【注意】上述运算方法，对于 $\lim\limits_{x\to-\infty}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}$ 都是成立的.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A$，（$C$ 为常数）；

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B},\ (B\neq 0).$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-3)$.

【详解】$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-3)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}2x-\lim\limits_{x\to 2}3=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+2\lim\limits_{x\to 2}x-3=5$.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}$.

【详解】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+6)}=\dfrac{4}{7}$.

例 10　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

【详解】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.